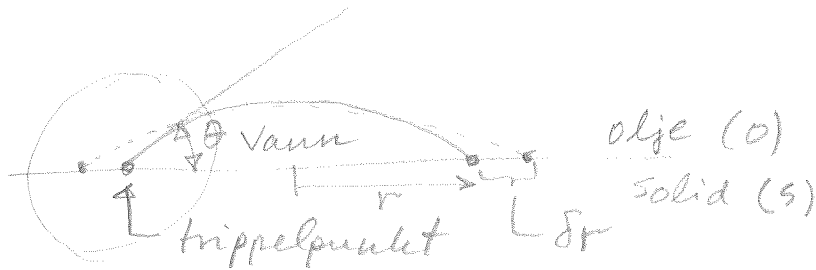


Young-Dupre's ligning

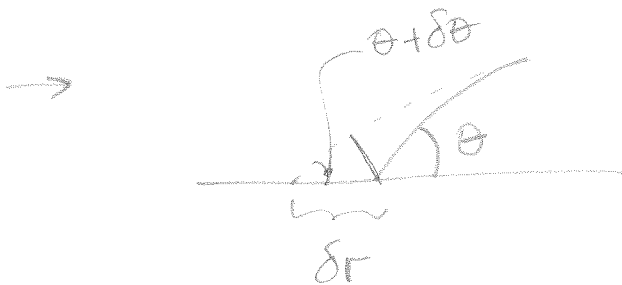
Vanndråpe på fast stoff
omgitt av olje.



θ : kontaktvinkel, tangent til OW-overflaten i trippelpunktet solid-water-oil, målt gjennom tetteste fase, W.

Trippelpunktet er egentlig en trippellinje, omkranses $2\pi r$ av vanndråpen.

Foretar en virtuell (tenket) forskyvning av trippellinjen med δr . Denne er så liten at $\cos(\theta + \delta\theta) = \cos\theta \cdot \cos\delta\theta - \sin\theta \sin\delta\theta \approx \cos\theta$
 $L \approx 1$ $L \approx 0$



$$\begin{aligned} \text{Flaten O-W øker} \\ \text{med } 2\pi r \delta r \cdot \cos(\theta + \delta\theta) \\ = \underbrace{2\pi r \delta r}_{\delta A} \cos\theta = \delta A \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

Ved den virtuelle forskyvningen øker kontaktflaten WS med δA , kontaktflaten OS minsker med samme, $-\delta A$ og kontaktflaten OW øker med $\delta A \cdot \cos\theta$.

Endringene i energiene blir like endring i kontaktflate multiplisert med overflatespenningen, summert

$$\delta E = \delta E_{ws} + \delta E_{ow} + \delta E_{os}$$

$$= \delta A \cdot \sigma_{ws} + \delta A \cos \theta \cdot \sigma_{ow} - \delta A \sigma_{os}$$

I likevekt så er $\delta E = 0$

som gir $\sigma_{os} - \sigma_{ws} = \sigma_{ow} \cos \theta$ Young-Dupre

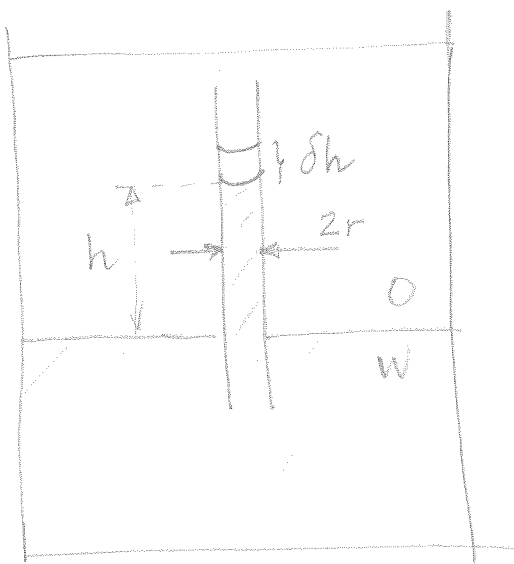
σ_{ws}, σ_{os}

overflatespenninger

fluid-fast

stoff -

Hvor høyt stiger vann i et kapillarrør?



Tenker oss at vannet står opp en høyde h .

Foretar en vertikal forflytning (virtuell)

δh . Beregner tilhørende endring i energi, δE .

Endring i overflateenergi:

$$2\pi r (\sigma_{ws} - \sigma_{os}) \delta h$$

Endring i potensiell energi:

$$\pi r^2 (\rho_w - \rho_o) g \delta h \cdot h - \text{oljen i } \delta h \text{ erstattes med vann.}$$

Summen av endringer:

— tetthet vann

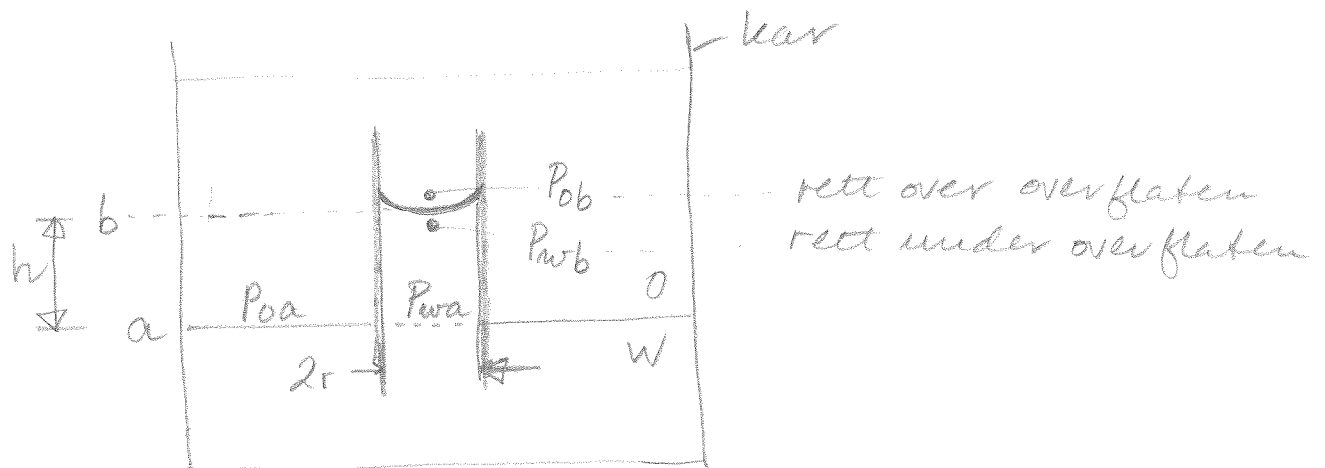
$$\delta E = 2\pi r (\sigma_{ws} - \sigma_{os}) \delta h + \pi r^2 (\rho_w - \rho_o) g \delta h \cdot h = 0$$

$$2(\underbrace{\sigma_{ws} - \sigma_{os}}_{-\sigma_{ow} \cos \theta}) + r(\underbrace{\rho_w - \rho_o}_{\Delta \rho})gh = 0$$

Fra Young-Dupre

$$\text{Gir } h = \frac{2\sigma_{ow} \cos \theta}{\Delta \rho g r}$$

Trykkløst i vertikalt kapillarrør



Vertikalt kapillarrør i et kar med olje og vann. Røret stiller ned i vannet. To nivåer, a: vann-olje overflate ute i karet, antar at denne er plan.

b: vann-olje kontakten inne i røret, denne krummer.

Skal senere se at Young-Laplace sitt uttrykk for kapillartrykk at trykket er det samme på begge sider av en plan flate. Det vil si at $P_{oa} = P_{wa}$.

Ved å gå fra nivå a gjennom vann inne i vaset opp til nivå b, får vi

$$P_{wb} = P_{wa} - \rho_w g h,$$

og ved å gå opp fra nivå a til b gjennom ølje ute i karet,

$$P_{ob} = P_{oa} - \rho_o g h.$$

Trekker disse fra hverandre og får

$$\underbrace{P_{ob} - P_{wb}}_{P_c} = \underbrace{(P_{oa} - P_{wa})}_{=0} + \underbrace{(\rho_w - \rho_o)}_{\Delta \rho} g h$$

$$\underline{P_c = \Delta \rho g h}$$

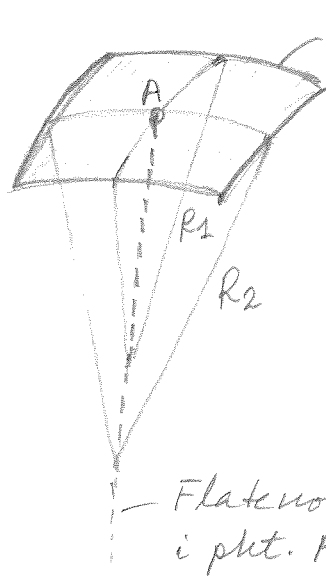
Her er P_c per definisjon kapillærtrykket ved nivå b inne i vaset. P_c er sprang eller differanse i trykk over en ^{krum} overflate mellom to faser. Legg merke til at spranget i trykk er over en overflate uten tykkelse (infinitesimal).

Setter vi inn for $h = \frac{2 \sigma_{wo} \cos \theta}{\Delta \rho g r}$

så får vi

$$\underline{P_c = \frac{2 \sigma \cos \theta}{r}} \quad (\sigma: \sigma_{ow})$$

Young-Laplace sin ligning



Kontaktflate mellom to fluid,
f.eks. olje-vann

A: Vilkårlig valg punkt
på kontaktflaten.

I pkt. A legges et tangentplan
til flaten, ikke vist på figuren.
Normalt på tangentplanet i A
trekkes flatenormalen.

Det kan da vises, se eget utlagt notat om
dette, at en kan finne to hovedplan som
står normalt på hverandre og normalt på
tangentplanet og slik at snittkurvene mellom
disse to hovedplanene og kontaktflaten gir
den største, R_2 , og minste, R_1 , krumningsradius
som er mulig mellom et normalplan og
kontaktflaten; hovedkrumningsradier.

Da blir (se utlagt notat)

$$P_c = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \text{Young-Laplace}$$

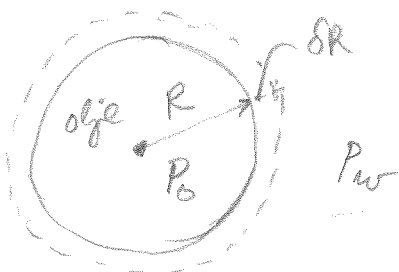
Merk at dette er et helt generelt uttrykk
for kapillartrykket P_c over en vilkårlig
krummet flate mellom to fluid.

Dersom kontaktflaten er et plan, så
er $R_1 = R_2 = \infty$ og $P_c = 0$, som vi brukte
for å beregne trykkløsheten i et vertikalt
kapillarrør.

Utleiing av Young-Laplace sin ligning for en kuleformet kontaktflate

Kuleformet oljedråpe i vann, $R_1 = R_2 = R$

vann



Virtuelle forskyvning δR av radien gir en energiforandring til kulen på $(P_w - P_o) 4\pi R^2 \cdot \delta R$. Fortegnet

kan en sjekke ved at dersom

$P_w > P_o$ og δR er positiv så må oljedråpen ha fått tilført energi for å kunne utvide seg mot et overtrykk.

Forandringen i overflateenergi er

stryker 2. ordens ledd

$$\begin{aligned} \delta(4\pi(R + \delta R)^2 - 4\pi R^2) &= 4\pi\delta(2R\delta R + \cancel{(\delta R)^2}) \\ &\approx 4\pi\delta \cdot 2R\delta R \end{aligned}$$

Summen av disse energiendringene må være like 0 i likevekt, i.e. $\delta E = 0$:

$$(P_w - P_o) 4\pi R^2 \delta R + 4\pi\delta \cdot 2R \cdot \delta R = 0$$

$$P_c = P_o - P_w$$

$$P_c = \frac{2\delta}{R}$$

som også den generelle form av Young-Laplace ligning gir når $R_1 = R_2 = R$.

P_c er en funksjon av S_{w} (olje-vann)



/// : sandhorn

/// : vann ○ : olje

Vann fyller bergarten, sandkornene i eksempelet. Oljen befinner seg i midten av porekanalen.

Tverrsnitt av porekanal mellom 4 sandhorn.

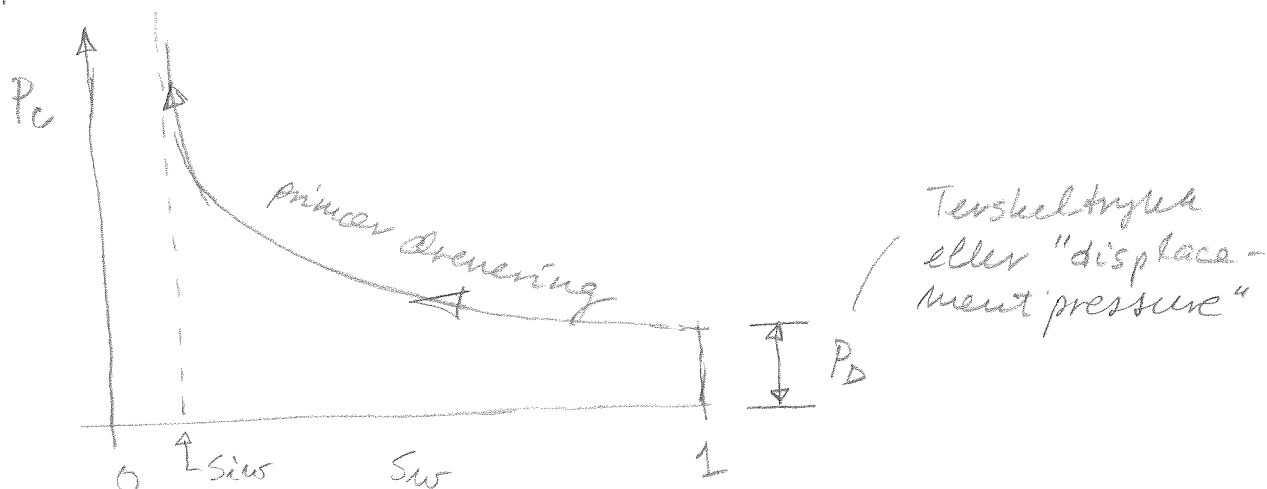
To tilfeller av oljemetning er tegnet, 1 og 2, $S_{o2} > S_{o1}$. I begge tilfellene er kapillartrykket gitt ved Young-Laplace, $P_c = 5\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$.

Overflatespenningen σ er den samme. I tilfelle 2, i likevekt, så er P_{c2} konstant når vi beveger oss rundt på olje-vann overflaten. Derfor er også $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)_2$ konstant. Det samme gjelder for tilfelle 1. Men i tilfelle 2 krummer overflaten mer. Oljen er presset inn i trangere partier av porekanalen. Derfor er $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)_2 > \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)_1$

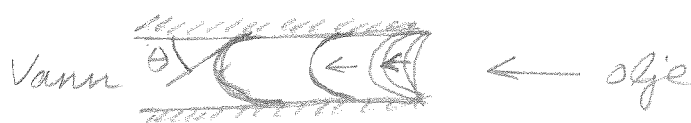
og $P_{c2} > P_{c1}$. Videre er $S_{w1} > S_{w2}$. Det betyr at P_c øker når S_w minsker, og det er vist ved målinger i lab.

Generell form på målt kapillartrycks-
kurve for olje-vann; eksempel med vannfyltende
prøve.

Start: 100% vannmettet prøve, olje presses inn
i prøven som fortrekker vann. Prosess: primær drenering



P_D er det kapillartrykk som en må opp i for å
få olje inn i den største porekanalen;



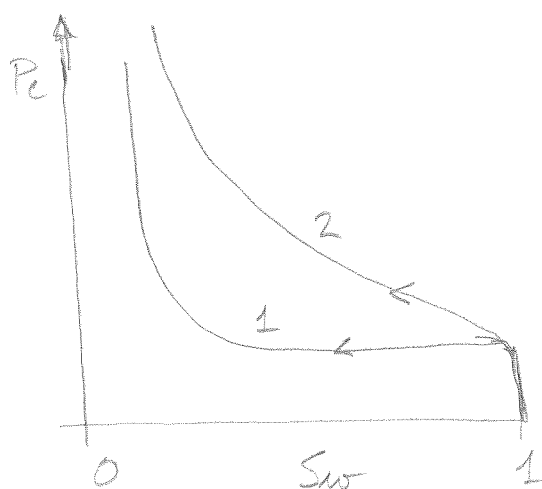
↳ Største porekanal i snitt

Oljen presses inn
inntil kontaktvinkelen θ er etablert

og $P_D = \frac{2\sigma \cos \theta}{r_{max}}$, r_{max} radius av største
porekanal.

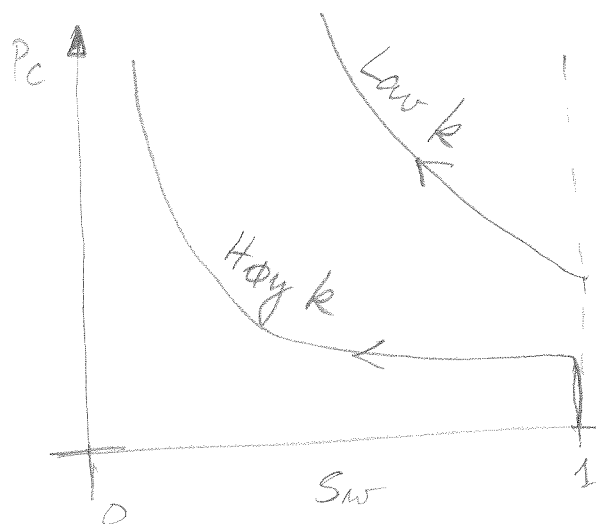
Asymptoten ved S_{iw} : Måtningsområdet
fra 0 til S_{iw} representerer de trangeste
porekanalene som oljen ikke kan trenge
inn i. P_c går mot uendelig når $S_w \rightarrow S_{iw}$
som kalles irreversibel vannmetning.

Eksempler på kapillærtvylleskinner



1: Mange porer kanaler like i størrelse $\Rightarrow$ uniform kornfordeling.

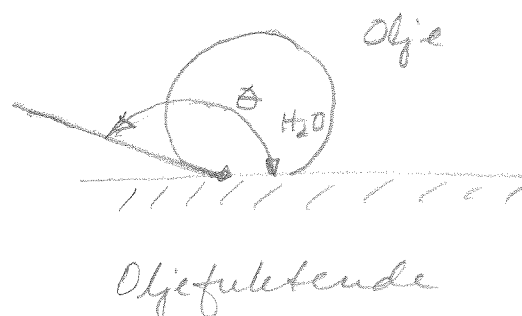
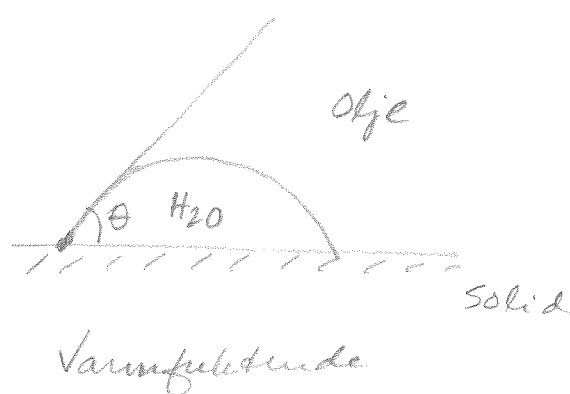
2: Spredning i størrelsen av porer kanaler $\Rightarrow$ ikke-uniform kornfordeling



Høy permeabilitet
 $\Rightarrow$ større radier
 $\Rightarrow$ Lavere P_c

Fuktpreferanse (wettability)

Fuktpreferansen kan uttrykkes ved kontaktvinkelen θ . Dersom denne er $\theta \in [0, \pi/2]$ er bergarten vannfuktende, dersom $\theta \in [\pi/2, \pi]$ er bergarten oljefuktende.

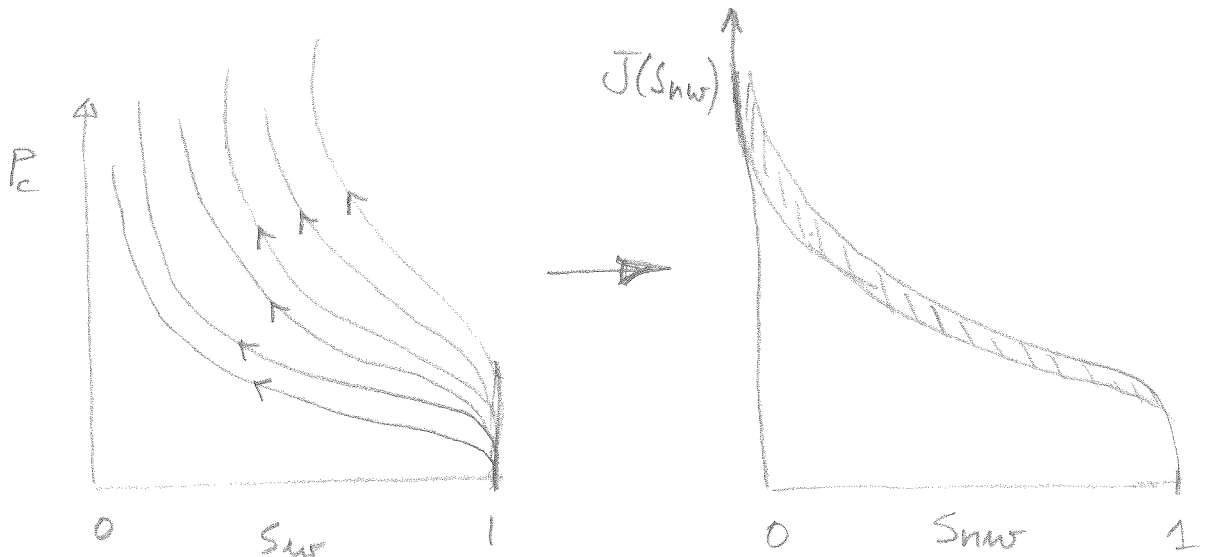


Dersom bergarten er vannfuktende vil vann spontant bli sugd inn i poresystemet og olje kommer ut.

Fuktpreferansen måles også ved å måle kapillartrykkskurver, for drenering og imbibering (S_w øker igjen), og beregne såkalte indekser, Amott eller Amott-Harvey indeksen.

Leverett sin J-funksjon

Leverett viste med eksperimentelle data at det er mulig å definere et dimensjonsløst kapillartykk, kalt J-funksjon, som grupperer kapillartykkeshurver fra samme facies sammen til et smalt bånd.



Kapillartykkeshurver fra samme geologiske facies.

J-funksjonen som funksjon av normalisert vannmetning S_{nw} .

$$S_{nw} = \frac{S_w - S_{iw}}{1 - S_{iw}} ; S_{nw} \in [0, 1]$$

J-funksjonen er definert som

$$J = \frac{P_c \sqrt{\frac{k}{\phi}}}{\sigma \cos \theta}$$

At dette er en fornuftig og hensiktsmessig definisjon kan vises på flere måter. I kompendiet er brukt Buckingham's Pi Theorem. På hjemmesiden til faget er det lagt ut et notat om J-funksjonen. Det er brukt en enkel

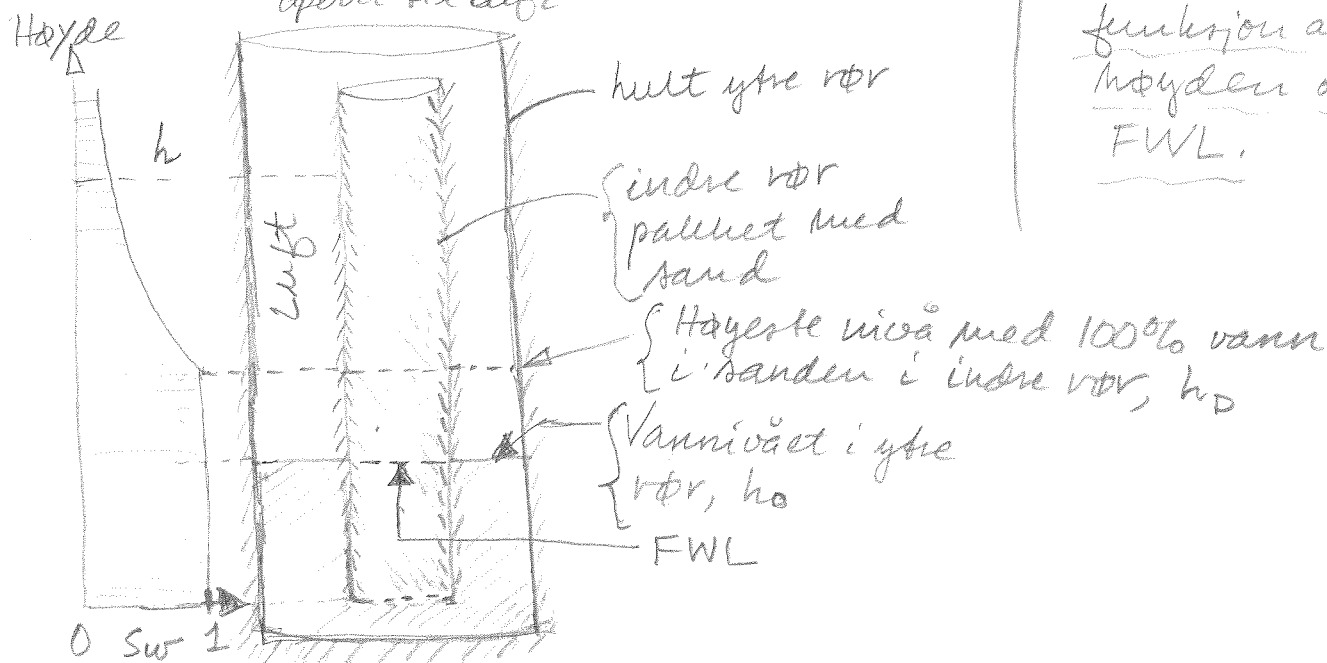
modell av porenettverket, en bunt av
 rette rør med samme radius. Det er vist
 at definisjonen av J er fornuftig og at
 verdien for en bunt rette rør med samme
 radius er like $1/\sqrt{2}$, uavhengig av
 metningen.

Omvendt, dersom J -funksjonen er kjent for
 en formasjon (facies) så kan en med kjennskap
 til ϕ, k, σ, θ danne seg individuelle P_c -kurver
 for lokale variasjoner innen samme facies.

Det frie vannivå, Free Water Level, FWL

(13)

La oss starte med et eksempel i lab.
åpent til luft



og Sw som
funksjon av
høyden over
FWL.

Det indre røret er laget av finmasket netting, åpent på toppen og dekket med netting i bunn. Nettingrøret er fylt med sand og var først 100% mettet med vann før det ble satt ned i et ytre, tett rør (åpent på topp). Vannet har seget ut i det ytre røret og steget opp til nivå h_o . Inne i sanden er det 100% vann opp til $h_D > h_o$. Kapillartrykket mellom vann og luft holder vannet oppe på nivå h_D inne i sanden.

Vann-luft kontaktflaten i det ytre røret er et plan ved h_o og kapillartrykket mellom de to fasene er null her, iflg. Young-Laplace sin ligning. Det vil si at

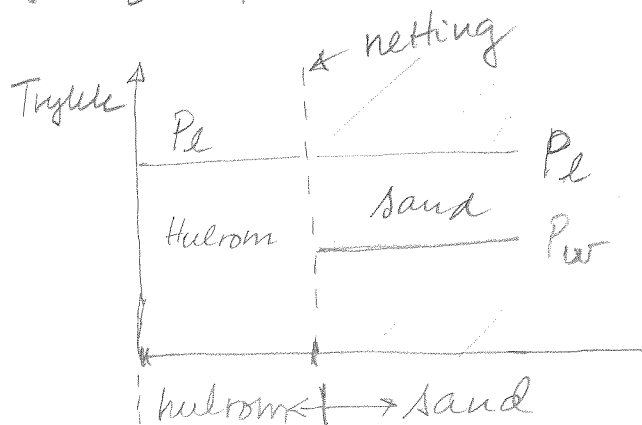
$$P_w(h_o) = P_l(h_o)$$

↳ luft

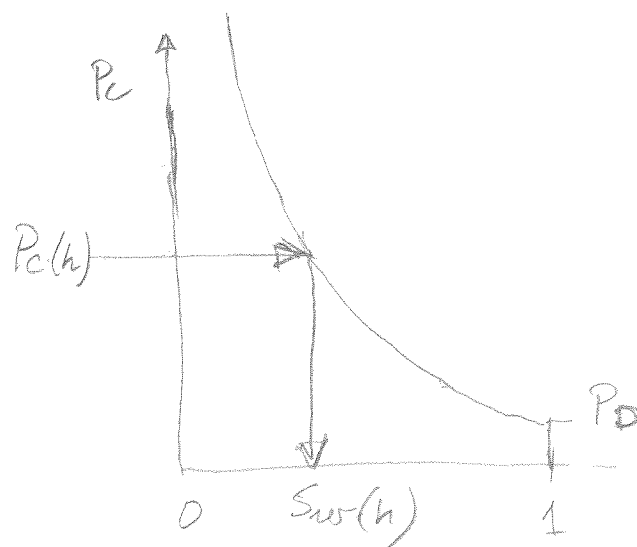
Dette samme nivået, h_0 , inne i sanden, kalles Free Water Level, FWL.

Høyden h_0 svarer til terskeltrykket P_0 på kapillærtrykkeskurven. Fra h_0 av og oppover er det luft inne i sanden. For en vannfuktende sand vil $P_c = P_l - P_w$ være et positivt tall. Lufttrykket er større enn vanntrykket på ethvert nivå over h_0 i sanden og likt lufttrykket i hulrommet på samme nivå. Det er alltid slik at trykket i den ikke-fuktende fasen i et porøst medium er kontinuerlig over en grenseflate.

Trykkløp med h , et stykke opp i røret



Differansen
 $P_c = P_l - P_w$
 gir metningen
 S_w ved h
 fra P_c -kurven.



Vi kan beregne kapillartrykket: $P_c(h)$ inne i sanden ved følgende betraktning:

$$P_e(h) = P_e(h_0) - \rho_e g(h - h_0)$$

$$P_w(h) = P_w(h_0) - \rho_w g(h - h_0)$$

Trekker fra hverandre og får

$$\underbrace{P_e(h) - P_w(h)}_{P_c(h)} = \underbrace{P_e(h_0) - P_w(h_0)}_0 + \underbrace{(\rho_w - \rho_e)}_{\Delta \rho} g(h - h_0)$$

Vi kaller $(\rho_w - \rho_e) = \Delta \rho$ og så velger vi nullpunktet på høydeskalaen til h_0 , altså vi setter $h_0 = 0$ og regner høyden derfra.

Da får vi

$$P_c(h) = \Delta \rho g h$$

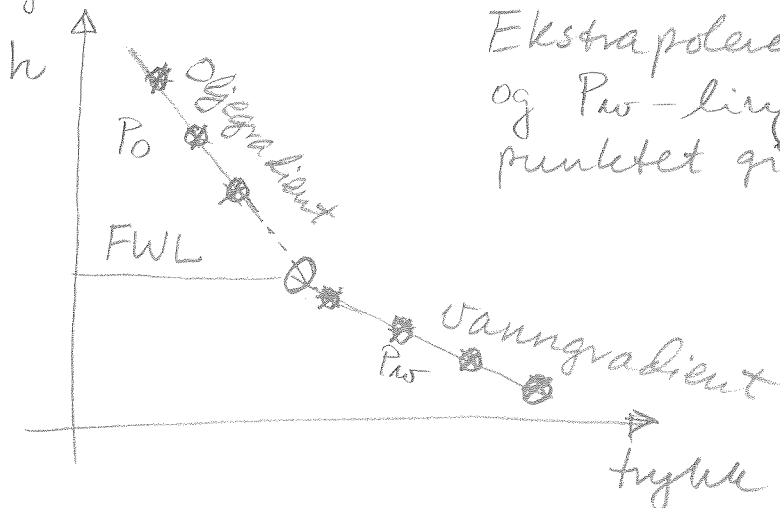
hvor h er regnet fra FWL. Vi kan av dette beregne $P_c(h)$ og gå inn i kapillartrykkskurven for sanden og finne $S_w(h)$.

[I dette eksempelet er $\rho_w \gg \rho_e$ og vi kunne ha neglisjert ρ_e . Men det er ikke tilfelle for olje eller gass i reservoaret, som er sammen med vann.]

I reservoaret kunne en i prinsipp bestemme h_0 og dermed FWL ved å la en brønn (åpent hull, for komplettering) komme til likevekt og finne olje-vann overflaten inne i brønnen, hvor $P_e = 0$. Dette byr på praktiske vansker og venting. I stedet bruker en to andre metoder:

1. Ved logging, resistivitetslogg f.eks., kan en bestemme h_D , høyeste nivå med bare vann i formasjonen. Dersom en har målt kapillartrykkeskurven i lab og bestemt P_D , terskeltrykket, så kan en beregne $h_D - h_0$ fra $P_D = \Delta \rho g (h_D - h_0)$ og dermed finne h_0 som er lik FWL.

2. Ved RFT, Repeat Formation Tester, kan en måle trykket i formasjonen som funksjon av høyden. Dersom en starter opppe i oljesonen og vann er fuktende fase, så måles oljetrykket nedover så lenge det er olje tilstede. Deretter følges vanngradienten.



Ekstrapolerer P_0 -linjen og P_w -linjen. Skjæringspunktet gir FWL hvor $P_0 = P_w$.

⊗ : målepunkter