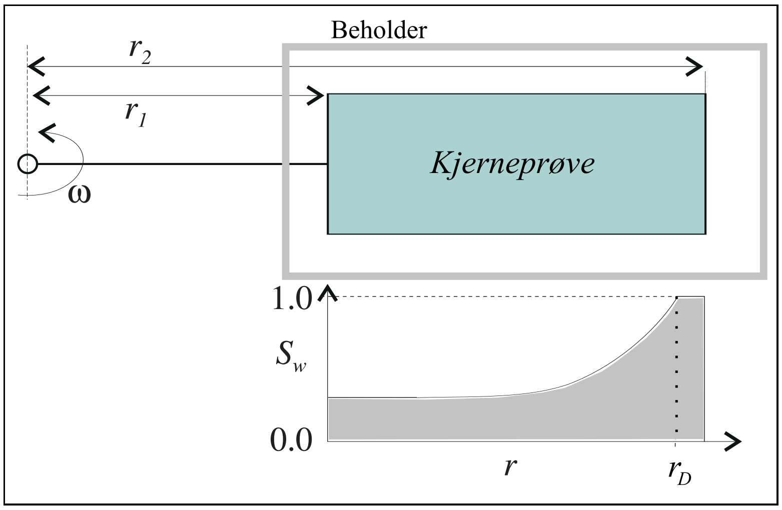
ResTek1—Løsning Øving 6



Figur 1: Skisse av den ene armen til en sentrifuge; kjerne i beholder.

a) Se forelesningene. En annen betraktningsmåte er følgende. I jordas gravitasjonsfelt er trykkforskjellen over en høyde h gitt ved $p_2 - p_1 = \rho g h$. Overfører vi dette til en sentrifuge er $h = r_2 - r_1$, mens $g = \omega^2 r$. Siden denne g'en varierer lineært med r, bruker vi middelverdien $\frac{1}{2}\omega^2(r_1 + r_2)$. Innsatt gir dette at $p_2 - p_1 = \rho\frac{1}{2}\omega^2(r_1 + r_2)(r_2 - r_1) = \frac{1}{2}\rho\omega^2(r_2^2 - r_1^2)$, med $p_2 = p(r_2)$ og $p_1 = p(r_1)$.

b) La indeks l betegne luft og w vann. Vann antas å være fuktende fase og dermed er $p_l \geq p_w$ inne i kjernen; og p_l må, for alle r der det er luft i kjernen, være i likevekt med lufttrykket i beholderen utenfor kjernen. For lufttrykket i beholderen har en da

$$p_{l2} - p_{l1} = \frac{1}{2}\rho_l\omega^2(r_2^2 - r_1^2) \qquad (1)$$

og for vannet inne i kjernen

$$p_{w2} - p_{w1} = \frac{1}{2}\rho_w\omega^2(r_2^2 - r_1^2) \qquad (2)$$

Siden vannet strømmer ut fra kjernen ved r_2 må vanntrykket være kontinuerlig ved r_2 og

$$p_{l2} = p_{w2}, \text{ og dermed } p_{c2} = 0 \text{ og } S_{w2} = 1.0. \qquad (3)$$

Fra r_2 og innover mot omdreiningsaksen til r_D minker $p_w(r)$ raskere enn $p_l(r)$, og ved r_D er $p_l(r_D) - p_w(r_D)$ lik p_D og luft går inn i de største porekanalene. Vi trekker (1) fra (2) og bruker (3), og får

$$p_{l1} - p_{w1} = p_{c1} = \frac{1}{2}(\rho_w - \rho_l)\omega^2(r_2^2 - r_1^2),$$

og

$$p_{c1} = \frac{1}{2}\Delta\rho\,\omega^2(r_2^2 - r_1^2), \qquad \dots\dots\dots \quad (4)$$

og, dersom en ser på kapillartrykket i en avstand r fra omdreiningsaksen,

$$p_c(r) = \frac{1}{2}\Delta\rho\,\omega^2(r_2^2 - r^2). \qquad \dots\dots\dots \quad (5)$$

c) Midlere vannmetning $\bar{S_w}$ i prøven er definert ved

$$\bar{S_w} = \frac{1}{r_2 - r_1}\int_{r_1}^{r_2} S_w(r)dr.$$

Fra (4) og (5) får en

$$\frac{p_c(r)}{p_{c1}} = \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2},$$

og $p_c(r_2) = 0$, $p_c(r_1) = p_{c1}$. Dermed blir, med $f = r_1/r_2$, og løst med hensyn på r,

$$r = \sqrt{r_2^2 - \frac{p_c(r)}{p_{c1}}(r_2^2 - r_1^2)} = r_2\sqrt{1 - \frac{p_c(r)}{p_{c1}}(1 - f^2)},$$

og differensiert,

$$dr = -\frac{r_2(1 - f^2)}{2p_{c1}}\left[1 - \frac{p_c(r)}{p_{c1}}(1 - f^2)\right]^{-1/2} dp_c,$$

og innsatt i uttrykket for $\bar{S_w}$ får vi,

$$\bar{S_w} = -\frac{r_2(1 - f^2)}{2p_{c1}(r_2 - r_1)}\int_{p_{c1}}^{p_{c2}} S_w(p_c)\left[1 - \frac{p_c(r)}{p_{c1}}(1 - f^2)\right]^{-1/2} dp_c, \qquad (6)$$

$$= -\frac{(1 - f^2)}{2p_{c1}(1 - f)}\int_{p_{c1}}^{0} S_w(p_c)\left[1 - \frac{p_c(r)}{p_{c1}}(1 - f^2)\right]^{-1/2} dp_c, \qquad (7)$$

$$= \frac{1 + f}{2p_{c1}}\int_{0}^{p_{c1}} S_w(p_c)\left[1 - \frac{p_c(r)}{p_{c1}}(1 - f^2)\right]^{-1/2} dp_c. \qquad (8)$$

Dersom $f = r_1/r_2$ tilnærmet kan settes lik 1.0, (det kan vises at dette er en god tilnærmelse dersom $f > 0.7$) får en

$$\bar{S_w} = \frac{1}{p_{c1}} \int_0^{p_{c1}} S_w(p_c) dp_c, \tag{9}$$

$$\bar{S_w} p_{c1} = \int_0^{p_{c1}} S_w(p_c) dp_c, \tag{10}$$

$$S_w(p_{c1}) = S_{w1} = \frac{d}{dp_{c1}} (\bar{S_w} p_{c1}). \tag{11}$$

d) La oss regne i SI-systemet med $r_1 = 0.0446$ m, $r_2 = 0.0938$ m, $\omega = 2\pi$ RPM/60 rad/s, $\Delta\rho = 1090$ kg/m^3. Fra spørsmål b) har en at

$$p_{c1} = \frac{1}{2} 1090 \frac{(2\pi)^2 (\mathrm{RPM})^2}{60^2} (0.0938^2 - 0.0446^2)\ \mathrm{Pa}\ = 4.07 \cdot 10^{-5}\ (\mathrm{RPM})^2\ \mathrm{kPa}.$$

Vi kan da sette sammen måledata og tolkede data i Tabell 1. Kurven av $p_{c1} \cdot \bar{S_w}$ vs.

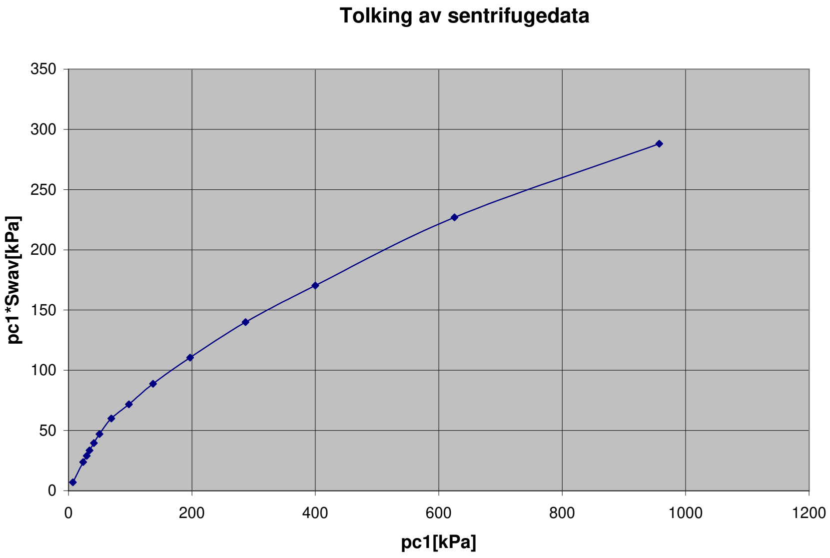
RPM	p_{c1}	$\bar{S_w}$	$p_{c1} \cdot \bar{S_w}$	S_{w1}
415	7.0	1.000	7.0	1.00
765	23.8	1.000	23.8	0.98
850	29.4	0.988	29.0	0.94
915	34.1	0.982	33.5	0.91
1005	41.1	0.964	39.6	0.85
1110	50.1	0.939	47.1	0.72
1305	69.3	0.866	60.0	0.52
1550	97.8	0.733	71.7	0.43
1835	137.0	0.648	88.8	0.39
2200	197.0	0.561	110.5	0.34
2655	286.9	0.488	140.0	0.30
3135	400.0	0.426	170.4	0.26
3920	625.4	0.363	227.0	0.21
4850	957.3	0.301	288.1	

Tabell 1: Sentrifugedata og tolkede verdier.

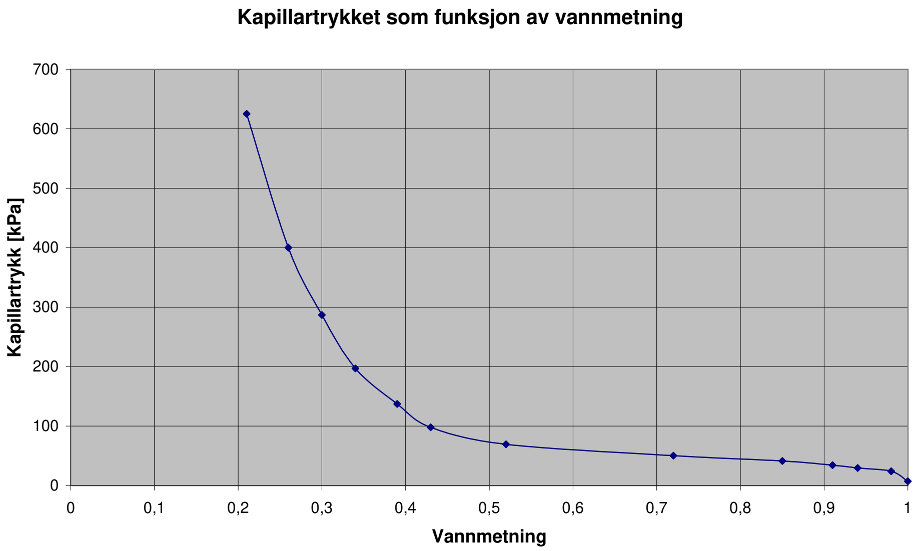
p_{c1} er plottet i figur 2. Verdier av S_{w1} kan finnes ved å trekke tangenter til kurven og beregne stigningsforholdet til tangenten. Siden en har så mange punkter i dette tilfellet, beregnes tangentens vinkelkoeffisient fra kordens. Som eksempel kan en se på datapunktet for RPM-verdien 2200. Vi beregner S_{w1}-verdien her som vinkelkoeffisienten til den korden vi kan trekke gjennom nabopunktene:

$$S_{w1} = \frac{140.0 - 88.8}{286.9 - 137.0} = 0.34.$$

Den resulterende kapillartrykkskurven er vist i figur 3.



Figur 2: Plott av $p_{c1}\bar{S_w}$ mot p_{c1}.



Figur 3: Kapillartrykket som funksjon av vannmetning.