Skisse til løsning

Eksamen i Reservoarsimulering, innføring
26. november 1999.

1a) Setter inn $P = pP_i + P_i$, $X = xL$, $T = tL^2/c_1^2$ og får

$$\frac{\partial}{L\partial x}\left(\frac{Ckb}{\mu}\frac{\partial(pP_i + P_i)}{L\partial x}\right) = \phi\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}P}\frac{\partial(pP_i + P_i)}{\frac{L^2}{c_1^2}\partial t},$$

som forenklet gir oppgitt uttrykk.

1b) Vi har

$$\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-}}{\Delta x} = \frac{\partial p}{\partial t},$$

hvor index $i+$ betyr 'tatt ved høyre blokkgrense' og indeks $i-$ betyr 'tatt ved venstre blokkgrense' av blokk `i`. Videre har vi at

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+} = \frac{p_{i+1,n} - p_{i,n}}{\Delta x}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-} = \frac{p_{i,n} - p_{i-1,n}}{\Delta x}; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p_{i,n+1} - p_{i,n}}{\Delta t},$$

hvor n angir 'gammelt' tidsnivå, $n+1$ 'nytt' tidsnivå. Indeks i angir trykket i midtpunktet av blokk nummer i og tilsvarende for $i+1$ og $i-1$. Merk at begge avstandsderiverte av p er tatt ved tidsnivå n, slik som det eksplisitte skjemaet krever. Trukket sammen så fås uttrykket i oppgaven.

1c) Vi setter inn i ligningen som prøveløsning at $p(x,t) = g(t)f(x)$ og finner at metoden med separasjon av variable kommer til anvendelse, se løsning til øving 3.

1d) Innsatt får vi

$$\frac{\psi(t+\Delta t)\mathrm{e}^{j\beta x} - \psi(t)\mathrm{e}^{j\beta x}}{\Delta t} = \frac{\psi(t)}{(\Delta x)^2}\left[\mathrm{e}^{j\beta(x-\Delta x)} - 2\mathrm{e}^{j\beta x} + \mathrm{e}^{j\beta(x+\Delta x)}\right],$$

og deretter

$$\left(\frac{\psi(t+\Delta t)}{\psi(t)} - 1\right)\mathrm{e}^{j\beta x} =$$
$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\mathrm{e}^{j\beta x}\left[\cos\beta\Delta x - j\sin\beta\Delta x - 2 + \cos\beta\Delta x + j\sin\beta\Delta x\right],$$

som gir

$$\xi = \frac{\psi(t+\Delta t)}{\psi(t)} = 1 + 2\lambda(\cos\beta\Delta x - 1) = 1 - 4\lambda\sin^2\frac{\beta\Delta x}{2}.$$

1e) Siden $\max(\sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}) = 1$, så må $\lambda \leq \frac{1}{2}$ forat $\xi \leq 1$.

1f) Ved innsetting av oppgitte data finner en at $c_1^2 = 9.16E+05$, og at $0.141 * 1.5^l = 0.5$ når l er tidsstegtelleren og multiplikatoren på tidsstegslengden er `dtmult = 1.5`. Av dette finner en at $k = 3.12$, altså etter ca. 4 tidssteg. Dersom verdien av $\sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}$ holder seg under 1, så vil antall tidssteg kunne bli noe større før ustabiliteten merkes.

1g) Differanseskjemaet blir nå

$$\frac{p_{i-1,n+1} - 2p_{i,n+1} + p_{i+1,n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{p_{i,n+1} - p_{i,n}}{\Delta t}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

og setter vi inn $p_{i,n} = \psi(t)\mathrm{e}^{j\beta x}$, så får vi etter litt forenkling,

$$\xi = \frac{1}{1 + 4\lambda \sin^2 \frac{\beta\Delta x}{2}},$$

slik at $\xi \leq 1$ for alle λ og implisitt formulering er dermed ubetinget stabil.

1h) En kan (1) sammenligne med analytisk løsning dersom en slik fins på en forenklet problemstilling, men med samme rutenett og tidssteg; (2) systematisk redusere blokklengde og tidsstegslengde inntil svaret ikke endres. En må i det siste tilfellet spesielt være oppmerksom på at det ikke nytter å redusere blokkstørrelsen dersom feilen henger på tidsstegslengden, eller motsatt.

2a $\mathbf{K}$ er en tridiagonal matrise, se kompendiet.

2b) Se kompendiet.

2c $\mathbf{K}$ er nå en penta-diagonal matrise og ligningssystemet løses på samme måte som under forrige spørsmål: Først nuller under hoveddiagonalen, så løses for siste trykk og deretter tilbakesubstituering.

3a) Se kompendiet.

3b) Se kompendiet.

3c) Variabel dimensjonering får en til ved å (1) lage en module-fil hvor matrisene står oppført uten størrelse, på formen

```
Module felles_matriser
        integer, parameter :: dp = kind(1.d0)
        integer, parameter :: sp = kind(1.0)
    real(dp), dimension(:), allocatable ::&
        a,c,d,al,s,comp,po,&
        pold,oxplus,oxmin,a9,&
        qo,bo,x
end module felles_matriser
```

Etter å ha lest inn dimensjonen `mx` (for endimensjonalt system) settes inn en `allocate`-kommando i hovedprogrammet, f.eks. `allocate(a(mx), c(mx) ...)`.

For å utveksle parameterverdier mellom hovedprogram og subrutine kan (1) verdiene overføres i kalle-setningen, eller (2) ved en felles `module`-fil og kommandoen `use <module-fil-navn>` øverst i hovedprogram og subrutine.