HØGSKOLEN I STAVANGER

AVDELING FOR TEKNISK - NATURVITENSKAPELIGE FAG

DATO: 26. NOVEMBER 1999

EKSAMEN I: TE 6192 Reservoarsimulering, innføring

VARIGHET: kl 09.00 – 14.00

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator

OPPGAVESETTET BESTÅR AV: 3 sider

MERKNADER: Ingen

Oppgave 1

Diffusivitetsligningen for strøm av en svakt kompressibel væske (vann eller olje) gjennom et porøst medium kan skrives på formen

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{Ckb}{\mu}\frac{\partial P}{\partial X}\right) = \phi\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}P}\frac{\partial P}{\partial T}, \qquad \text{(1)}$$

hvor P er trykket i psi, X er avstand i ft, k er permeabiliteten i md, b er invers volumfaktor i stb/rb, μ er viskositeten i cp og T er tiden i døgn. Anta at b i strømningsleddet, $\mathrm{d}b/\mathrm{d}P$, μ og k er konstanter. Omregningskonstanten C er lik 0.00632827.

a) Innfør dimensjonsløse størrelser (p,x,t) gitt ved $p = (P - P_i)/P_i$, $x = X/L$, $t = Tc_1^2/L^2$. Her er L lengden av reservoaret i ft, P_i initielt trykk og $1/c_1^2 = (\phi\mu\cdot\mathrm{d}b/\mathrm{d}P)/(Ckb)$. Vis at ligning (1) nå kan skrives som

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}. \qquad \text{(2)}$$

b) Vis at eksplisitt numerisk formulering med differansemetoden gir ligningen

$$\frac{p_{i-1,n} - 2p_{i,n} + p_{i+1,n}}{(\Delta x)^2} = \frac{p_{i,n+1} - p_{i,n}}{\Delta t}, \qquad \text{(3)}$$

dersom alle blokkene har samme lengde Δx. Her er p_i dimensjonsløst trykk i midtpunktet av blokk i og $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ er tidsstegslengden.

c) Forklar kort at metoden med separasjon av variable kan egne seg til å finne en analytisk løsning av ligning (2).

d) La oss nå anta at løsningen $p(x,t)$ av ligning (2) er funnet som et produkt av en funksjon av tiden, la oss si $\psi(t)$, og en annen funksjon som kun er avhengig av x. Denne siste funksjonen rekkeutvikles (i en kompleks Fourierrekke). Bortsett fra en konstant er et typisk ledd i rekkeutviklingen gitt ved $\mathrm{e}^{j\beta x}$, hvor β er et reelt tall og $j = \sqrt{-1}$. Et ledd i rekkeutviklingen av løsningen $p(x,t)$ kan da representeres ved $\psi(t)\mathrm{e}^{j\beta x}$. Sett dette inn i ligning (3) og vis at forsterkningsfaktoren $\xi = \psi(t+\Delta t)/\psi(t)$ for eksplisitt formulering er gitt ved

$$\xi = 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{\beta \Delta x}{2}, \quad \text{hvor } \lambda = \Delta t/(\Delta x)^2. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Oppgitt: $\mathrm{e}^{j\beta x} = \cos \beta x + j \sin \beta x$,
$1 - \cos \beta x = 2 \sin^2 \beta x/2$.

e) For at den numeriske løsning skal være stabil og ikke vokse over alle grenser når Δt øker eller Δx minker, så må $|\xi| \leq 1$. Vis at dette krever at $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

f) I øvingsoppgave 4 ble følgende data brukt til å undersøke stabilitet og diskretiseringsfeil av tre numeriske formuleringer. Enhetene er som angitt under spørsmål a). Fra hvilket tidssteg av kan en forvente ustabilitet fra den eksplisitte formuleringen?

```
mx = 6
kx = 100
phi = 0.05
dex = 10
borig = 0.7889
visorg = 1.358
dbdp = 8.03d-06
delmin = 0.000015415
dtmult = 1.5
```

g) Vis at implisitt numerisk formulering av ligning (2) gir en ubetinget stabil løsning.

h) Hvordan kan en i praksis kontrollere at diskretiseringsfeilen er liten nok?

Oppgave 2

Implisitt numerisk formulering av diffusivitetsligningen for enfasestrøm gir et lineært ligningssett på formen $\mathbf{Kp} = \mathbf{d}$ hvor $\mathbf{p}$ og $\mathbf{d}$ er to søylevektorer med N elementer og $\mathbf{K} = \{k_{ij}\}$ er en $N \times N$ koeffisientmatrise.

a) Hvilken struktur har **K** for endimensjonal strøm, dvs. hvilke elementer k_{ij} er forskjellige fra null? Hva kalles en slik matrise?

b) Skisser en Fortran-rutine som kan løse et slikt lineært problem ved eliminasjon.

c) Hva er strukturen til **K** for todimensjonal strøm og hvordan kan nå lignings-systemet løses ved eliminasjon?

Oppgave 3

a) Lag en grov skisse av strukturen til et Fortran-program som skal simulere strøm av en fase i en dimensjon. Skissen skal gi rekkefølge og mulige forgreninger mellom følgende kodeelementer, her angitt i vilkårlig rekkefølge:

```
tidsstegsløyfe
materialbalanse
innlesing og utskrift
oppdatering av "gamle" størrelser
initiell trykklikevekt
deklarering av variabeltyper
kall til løsningsrutiner
kall til subrutine som setter opp koeffisientmatrisen
kall til subrutine som gir fluidegenskaper
sløyfe for iterasjoner på ulinære ledd
```

b) Vis hvor i programstrukturen under spørsmål a) du vil sette inn følgende kodeelementer:

```
omforming av k og φ for radielt system
sjekk av maksimal trykkendring over tidssteget
logikk for rateendring
beregning av brønntrykk for radielt system
beregning av gravitasjonsledd for hellende reservoar
generering av intern tabell for fluidegenskaper
"use felles_matriser"
kall til iterativ løsningsrutine SOR
```

c) Forklar hvordan en i Fortran 90 kan få til variabel dimensjonering av matriser ved hjelp av inngangsdata. Forklar også hvilke to måter som brukes til å utveksle verdier av variable mellom hovedprogram og subrutiner.