Oppgave 1

a) Det er massen som bevares. Symbol u står for Darcy hastighet (eller volumhastighet, eller 'superficial velocity' i f.eks. m/s; q er kildeledd som uttrykker injeksjon eller produksjon pr. (bulk-) volumenhet av reservoaret og har enheten (f.eks.) kg/(m^{3}s).

b) I reservoaret er som oftest temperaturen konstant, gitt av jordvarmen. Den kan imidlertid variere dersom det f.eks. injiseres kaldt vann. Her, med en fase, antar vi at den er konstant. Da vil V_f kun avhenge av trykket og vi kan skifte fra partiell til ordinær derivasjon.

Ved å føre inn massen m_f til volumet V_f får vi

$$\begin{aligned}
c_f &= -\frac{m_f}{V_f}\frac{d\left(\dfrac{V_f}{m_f}\right)}{dp} \\
&= -\rho\frac{d\left(\dfrac{1}{\rho}\right)}{dp} \\
&= -\rho\left(-\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dp}\right) \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{dp}\right)
\end{aligned}$$

Dette er en ordinær differensialligning som kan løses ved

$$\int\frac{d\rho}{\rho} = c_f\int dp + C,$$

$$\ln\rho = c_f p + C,$$

og ved å kreve

$$\ln\rho_r = c_f p_r + C$$

får en bestemt C og dermed blir

$$\rho = \rho_r\exp[c_f(p - p_r)]. \tag{1}$$

c) Setter inn for u fra Darcy's lov

$$u = -\frac{Ck}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

i bevarelsesligningen

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) - q + \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) = 0$$

og finner et uttrykk for $\frac{\partial p}{\partial x}$ ved å derivere (1) med hensyn på x:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho c_f \frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2}$$

Samlet gir dette

$$\frac{Ck}{\mu c_f}\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + q = \phi \frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{3}$$

d) Rekkeutvikler til 2. orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} &= \rho_r \frac{\partial^2}{\partial x^2} \exp[c_f(p - p_r)], \\
&= \rho_r \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[1 + c_f(p-p_r) + \frac{1}{2!}c_f^2(p-p_r)^2 + \cdots\right], \\
&\approx \rho_r c_f \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial p}{\partial x} + c_f(p-p_r)\frac{\partial p}{\partial x}\right], \\
&= \rho_r c_f \left[\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c_f\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + c_f(p-p_r)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right], \\
&= \rho_r c_f \left[(1 + c_f(p-p_r))\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c_f\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2\right], \\
&\approx \rho_r c_f(1 + c_f(p-p_r))\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

dersom

$$\left|\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right| \gg \frac{c_f\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2}{1 + c_f(p-p_r)}.$$

e) Dersom $c_f(p - p_r) \ll 1$ blir

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \approx \rho_r c_f \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Videre finner vi tilsvarende som for (2) at

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho c_f \frac{\partial p}{\partial t} \approx \rho_f c_f \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Setter vi dette inn i (3) og multipliserer med konstanten b_r så får vi

$$\frac{Ckb_r}{\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{qb_r}{\rho_r} = \phi c_f b_r \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{4}$$

La R betegne reservoarforhold, S overflateforhold, T tid, M masse og V volum. Da er $b_r = V_S/V_R(p_r)$, $q = M/T$, $\rho_r = M/V_R(p_r)$, slik at

$$\frac{qb_r}{\rho_r} : \frac{MV_S V_R}{MTV_R} = \frac{V_S}{T},$$

altså volumrate på overflaten.

Oppgave 2

a) Vi ser på blokk nr. i og lar A betegne grenseflaten mot naboblokken $i-1$ i negativ x-retning og B grenseflaten mot naboen $i+1$ i positiv x-retning. For å forenkle framstillingen setter vi hjelpestørrelsen Y lik

$$Y = \frac{Ckb_r}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x},$$

og (4) skrives som

$$\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{qb_r}{\rho_r} = \phi c_f b_r \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{5}$$

Vi bruker differansemetoden til å diskretisere ligning 5, høyre siden i romlig x-retning, og venstre siden i tid, og får[1]

$$\frac{Y_i|_B - Y_i|_A}{\Delta x} + \frac{q_i b_r}{\rho_r} = \phi c_f b_r \frac{p_i(t_{n+1}) - p_i(t_n)}{\Delta t}. \tag{6}$$

Videre er

$$Y_i|_B \approx \frac{Ckb_r}{\mu}\frac{p_{i+1}(t) - p_i(t)}{\Delta x},$$

og tilsvarende for det andre leddet,

$$Y_i|_A \approx \frac{Ckb_r}{\mu}\frac{p_i(t) - p_{i-1}(t)}{\Delta x}.$$

Disse to uttrykkene gir henholdsvis volumstrøm av olje inn fra høyre og venstre mot blokk i og ligning 6 setter differansen lik endring av oljevolum pr. tidsenhet i blokken ved ekspansjon eller injeksjon. I disse uttrykkene for volumstrømmen

[1] For enkelthets skyld bruker vi fortsatt standard likhetstegn mellom venstre og høyre siden, selv om disse nå er diskretiserte tilnærminger til differensialligningens høyre og venstre side.

inn mot blokk i må vi angi ved hvilket tidsnivå vi skal velge å bruke trykket. Det vanligste i moderne, industrielle reservoarsimuleringsmodeller er å velge t ved ny tid t_{n+1} (implisitt formulering).

Innsatt i ligning 6 får vi da

$$\begin{aligned}
&\frac{Ckb_r}{\mu(\Delta x)^2}[p_{i+1}(t_{n+1}) - p_i(t_{n+1})] \\
-&\frac{Ckb_r}{\mu(\Delta x)^2}[p_i(t_{n+1}) - p_{i-1}(t_{n+1})] \\
&\qquad\qquad\qquad + \frac{q_i b_r}{\rho_r} \quad = \quad \phi c_f b_r (p_i(t_{n+1}) - p_i(t_n))/\Delta t.
\end{aligned}$$

La oss sette $T = Ckb_r/\mu(\Delta x)^2$ og forenkle notasjonen ved å sette $p_k \equiv p_k(t_{n+1})$ for vilkårlig k. Ligningen ordnet blir da

$$Tp_{i-1} - (2T + \phi c_f b_r/\Delta t)p_i + Tp_{i+1} = -(\phi c_f b_r p_i(t_n)/\Delta t + \frac{q_i b_r}{\rho_r}).$$

Det er nå nødvendig å ta spesielt hensyn til endeblokkene. Vi skal anta at venstre endeflate av den første blokken og høyre endeflate av den siste blokken er lukket, eller sagt på en annen måte, $Y_1|_A = 0$ og $Y_l|_B = 0$, når N betegner siste blokk. For første blokk blir ligningen da

$$(T + \phi c_f b_r/\Delta t)p_1 + Tp_2 = -(\phi c_f b_r p_1(t_n)/\Delta t + \frac{q_1 b_r}{\rho_r}),$$

og for siste blokk N

$$Tp_{N-1} - (T + \phi c_f b_r/\Delta t)p_N = -(\phi c_f b_r p_N(t_n)/\Delta t + \frac{q_N b_r}{\rho_r}).$$

La k være lik 1 dersom blokknummeret i er lik 1 eller N og 2 ellers. Da kan vi definere

$$\begin{aligned}
B &= kT + \phi c_f b_r/\Delta t \\
a_i &= T/B \\
c_i &= T/B \\
d_i &= (\phi c_f b_r p_i(t_n)/\Delta t + (\frac{q b_r}{\rho_r})_i)/B,
\end{aligned}$$

og får ligning 6 på følgende numerisk form

$$\boxed{a_i p_{i-1} - p_i + c_i p_{i+1} = -d_i.} \tag{7}$$

b) Utkast til kode:

```
              subroutine tridia(imx)
c
c  solution subroutine for solving tridiagonal system of
c  linear equations; -1 on the main diagonal; matrix a denotes the
c  subdiagonal elements; matrix c the superdiagonal, and matrix d
c  the right-hand-side; imx is number of equations.
c
              double precision a, c, d, p, dia, dmod
              common /blk1/a(40), c(40), d(40), p(40)
              dimension dia(40), dmod(40)
c
c      initialization
              dia(1) = 1.d0
              dmod(1) = d(1)
c
c      dia: modified diagonal
c      dmod: modified right-hand- side
c
c      upper triangularization
              do 60 i = 2, imx
                      dia(i) = 1.d0 - a(i)/dia(i-1)*c(i-1)
                      dmod(i) = d(i) + a(i)/dia(i-1)*dmod(i-1)
   60         continue
c
c      solving for last pressure
              p(imx) = dmod(imx)/dia(imx)
c
c      back substitution
              do 70 k = 2, imx
                      i = imx - k + 1
                      p(i) = (dmod(i) + c(i)*p(i+1)) / dia(i)
   70         continue
              return
              end
c
c      end subrutine tridia
c
```

b) Strukturen til programmet går framgår av det komplette kodeforslag som er gitt under. For en fullverdig besvarelse kreves det at kandidaten kun gir hovedtrekkene i denne koden. Merk spesielt at `b` i koden tilsvarer b_r, `dbdp` tilsvarer $c_f b_r$

og qs tilsvarer qb_r/ρ_r.

```
        program endim

c       **real variables in double precision
c       a: matrix, normalized coefficient in front of p(i-1)
c       aa: coefficient in front of p(i)
c       c: matrix, normalized coefficient in front of p(i+1)
c       b: volume factor, stb/rb
c       conv: conversion factor, Darcy's law
c       d: matrix, minus left- hand-side of equation
c       dd: auxiliary variable to calculate d(i)
c       dbdp: derivative of b with respect to p, stb/rb/psi
c       dt: timestep size, days
c       dx: block length, ft
c       dy: block height, ft
c       dz: block width, ft
c       en: 1.d0
c       fpb: conversion factor, ft3/bbl
c       k: permeability, md
c       p: matrix, (new) pressures at timelevel tn+1, psi
c       phi: porosity, dimensionless
c       pn: matrix, (old) pressures at timelevel tn, psi
c       porig: original oil pressure, psi
c       qs: matrix, surface rate, stb/d
c       time: simulated time, days (equal to tn+1)
c       tn: old time, days
c       trans: transmissibility, Ckb/mu/dx/dx
c       to: 2.d0
c       vis: viscosity, cp
c       vol: block volume, rb
c       x: pressure point, ft
        double precision a, aa, b, c,
     z          conv, d, dd, dbdp, dt,
     z          dx, dy, dz, en, fpb, k,
     z          p, phi, pn, porig, qs,
     z          time, tn, trans, to, vis,
     z          vol, x
c
c       **integers
c       antall: number equal to 1 or 2
c       i: block number
```

```
c       im: i-1
c       imx: number of blocks, maximum of i
c       nmx: number of timesteps, maximum of n
                integer antall, i, im, imx, nmx
c
c       **character variables for defining in and out files
c               character innfil*80
c               character utfil*80
c
c       present dimensioning allows the simulation of a 40 block
c       linear system.
                dimension qs(40), x(40), pn(40)
c
c       common storage area is used between the main
c       program and subroutines
                common /blk1/a(40), c(40), d(40), p(40)
c
c       **open files for reading and writing.  input data are read
c       from your own data file. output results are
c       written to the result file.
c
c       **interactive spesification of the files are commented out
c       but included for reference. char(63) produces a question mark.
c       if a horizontal tab is needed, its code is char(9).
c               write(*,*)'innfil ' , char(63)
c               read(*,*) innfil
c
c               write(*,*)'utfil ', char(63)
c               read(*,*)utfil
c
c       the open-close-open sequence for the file 'utdat' is to delete
c       old version. Otherwise, the last part of the largest 'utfil'
c       would never be deleted.
                open (5,file='inndat',status='old')
                open (10,file='utdat')
                close (10,status='delete')
                open (10,file='utdat')
c
c     ** read and write input data.
                read  (5,*) imx, nmx
                write (10,3010) imx, nmx

                read  (5,*) k, phi, dx, porig, b
```

```
            read  (5,*) vis, dbdp, dt, dz, dy
            write (10,3020) k, phi, dx, porig, b, vis,
     z               dbdp, dt, dz, dy
            read (5,*) (qs(i),i = 1,imx)
            write (10,3030) (i,qs(i), i = 1,imx)
            write (10,3080)
c
c       ***begin calculations
c
c       **universal constants
            conv = 0.00632827d0
            fpb = 5.6146d0
            en = 1.d0
            to = 2.d0
c           pi  = 3.1415926d0
c
c       **other constants
            vol = dz*dy*dx/fpb
            trans =  conv*k*b/vis/dx/dx
c
c       **matrices a and c (note that a(1) and c(imx) are given values
c         that never are used while c(1) and a(imx) are different from
c         the other a(i) and c(i) that all are equal)
c       **note that if the timestep size dt is changed between
c         timesteps, this loop has to be moved inside the timestep
c         loop
            do 31 i = 1, imx
                    antall = to
                    if (i.eq.1) antall = en
                    if (i.eq.imx) antall = en
                    aa = antall*trans + phi*dbdp/dt
                    a(i) = trans/aa
                    c(i) = trans/aa
   31       continue
c
c       calculate pressure points
            x(1) = dx/to
            do 32 i = 2, imx
                    x(i) = dx + x(i-1)
   32       continue
            write (10,3040) (i,x(i),i=1, imx)
            write (10,3080)
c
```

```
c       initialize pressures and left-hand-side
                do 10 i = 1,imx
                        pn(i) = porig
                        p(i) = porig
   10           continue
c
c       initialize time
                time = 0.d0
c
c       ***start timestep loop
                do 6070 l = 1, nmx
c
c       **update pressures and d(i) which depends on pn(i)
c       **note that a(i) and c(i) also needs to be updated
c         if dt is changed
                        do 21 i = 1, imx
                                pn(i) = p(i)
c
                                antall = to
                                if (i.eq.1) antall = en
                                if (i.eq.imx) antall = en
                                aa = antall*trans + phi*dbdp/dt
                                dd = phi*dbdp*pn(i)/dt
                                d(i) = (dd + qs(i)/vol)/aa
   21                   continue
c
c       call to the tridiagonal solution routine to get new pressures
                        call tridia(imx)
c
c       write *****'s indicate new timestep
                        write (10,3070)
c       write new pressures
                        write (10,3050) (i, p(i), i=1, imx)
c
c       calculate time simulated
                        time = time + dt
c
c       write timestep info
                        write (10,3060)l,time
c
cc slutt tidsstegsl∅yfe
 6070           continue
c
```

```
c     ** close files
              close (5)
              close (10)
c
c     ** format statements
 3010         format (
     z  '  number of blocks in x-direction, imx .......... :', i3  /
     z  '  maximum number of time steps, nmx .......... :', i3  //)
c
 3020         format (
     z  '  permeability, k, md  ........................ :', f12.4/
     z  '  porosity, phi, fraction ..................... :', f8.4 /
     z  '  block length (x- dir), dx, ft ................ :', f10.2/
     z  '  original oil pressure, porig, psia ........... :', f10.1/
     z  '  volume factor, b, std vol / res vol .......... :', f10.4/
     z  '  oil viscosity, vis, cp ...................... :', f10.4/
     z  '  dbdp, std vol / res vol / psi................ :', f10.8/
     z  '  time increment, dt, days ..................... :', f10.6/
     z  '  block width, dz, ft ......................... :', f8.1/
     z  '  block thickness, dy, ft ..................... :', f8.1//)
c
 3030         format (
     z  '  block no. :', i3, '     oil rate, qs, stb/d .... ', f10.1)
c
 3040         format (
     z  '  block no. :', i3, '     pressure point, x(i), ft ', f8.1)
c
 3050         format (
     z  '  block no. :', i3, '     oil pressure, psia ..... ', f10.1)
c
 3060         format (2x,'steps=',i4,t22,'time=',d12.4//)
c
 3070         format (25('*****')/)
c
 3080         format (/)
c
              end
c
c       end of main program
c
```

Det er ikke nødvendig å iterere siden alle koeffisientene i differensialligningen (4) er konstante (og det brukes direkte løsning av det lineære ligningssettet).

d) I dette forenklede tilfellet med konstante koeffisienter så går det an å finne analytisk løsning. Et eksempel på dette er gjennomgått i Øving 3 hvor det samtidig startes produksjon og injeksjon med samme rate i hver ende av reservoaret.

Oppgave 3

Det er tilstrekkelig å simulere et vertikalt tverrsnitt som står normalt på den horisontale brønnen i oljesonen siden reservoaret kan betraktes som uendelig; endeeffekter til brønnen kan neglisjeres; og deformasjonen av de to kontaktene kan beskrives i et slikt tverrsnitt.

I dette tverrsnittet vil det være symmetri om en normal på brønnen, venstre og høyre halvplan oppfører seg likt. Vi kan derfor nøye oss med å simulere det ene halvplanet.

Valg av rutenett bør være slik at trykkfallene mellom naboblokker er tilnærmet like i nær stasjonær tilstand. Da vil nøyaktigheten være tilnærmet den samme over hele rutenettet. Dette betyr finere grid inn mot brønner og over diskotinuiteter i strømningsegenskaper som f.eks. permeabiliteter.

Vi velger et koordinatsystem med x-aksen horisontal og normal på brønnen, y-aksen vertikal og z-aksen horisontal langs brønnen. Dermed vil det være bare en (vilkårlig) blokklengde i z-retning.

Trykkgradientene øker i x-retning inn mot brønnen og blokklengdene foreslås øket med en konstant faktor, la oss si 2.

I y-retning må det tas hensyn til at trykkgradientene øker når en nærmer seg brønnen. Samtidig må det være fin-gridding over de to kontaktene som utgjør diskontinuiteter i strømningsegenskaper. Imidlertid vil jo de to kontaktene bevege seg mens griddet ligger fast. For å kunne få god nøyaktighet selv om kontaktene beveger seg, må det derfor være like fint grid over hele oljesonen mellom de opprinnelige kontaktene.

Et forslag blir da som følger:

GRID

<u>Number of gridblocks</u>

$15 \times 155 \times 1 = 2325$

<u>x-direction block sizes, ft</u>

0.5, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 5000.

y-direction block sizes, ft, from top

20×165, 80, 57, 37, 12, 6, 4, 2, 10×1, (GOC), 40×1, 1 (WELL), 40×1, (WOC), 10×1, 2, 4, 6, 12, 20, 40, 80, 20×165

z-direction block size, ft

1500.