

Øving 5

Læreboka, 8. utgave: Oppgave 8.26, 9.15, 9.76, 10.25 og 10.68.

Læreboka, 7. utgave: Kap. 8.5: Oppgave 10
Kap. 9.7: Oppgave 15
Kap. 9.13: Oppgave 6
Kap. 10.10: Oppgave 7
Kap. 10.13: Oppgave 2

Oppgave 1:

Et meningsmålingsbyrå skal kartlegge hvor stor andel av velgerne (på landsbasis) som ville stemme på de ulike partiene dersom det var stortingsvalg i dag. Vi skal i denne oppgaven se på andelen av velgerne som ville stemme på Arbeiderpartiet (Ap), og kaller denne andelen p . Anta at meningsmålingen utføres ved at 1000 tilfeldig valgte velgere blir spurte. La X = antallet som ville stemme Ap.

- a) Forklar hvilken eksakt fordeling X har, og forklar hvorfor denne fordelingen kan tilnærmes med en binomisk fordeling med parametre n og p .
- b) Dersom $p = 0.275$, hva er da sannsynligheten for at X blir større enn 300?

I praksis er p ukjent, formålet med meningsmålingen er nettopp å estimere p .

- c) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for p blir $\hat{p} = \frac{X}{n}$.
Regn ut $E(\hat{p})$ og $\text{Var}(\hat{p})$.

Av de 1000 spurte svarte 297 at de ville stemme Ap.

- d) Utled et tilnærmet 95% konfidensintervall for p , og regn ut hva intervallet blir med observasjonen over.
(Hint: Du kan i utledningen bruke at $p(1-p) \approx \hat{p}(1-\hat{p})$ når n er stor.)

Ved stortingsvalget i 2005 fikk Ap en oppslutning på landsbasis på 32.7%.

- e) Er oppslutningen om Ap nå lavere enn ved forrige Stortingsvalg? Formuler problemstillingen som en hypotesetest og utfør hypotesetesten på 5% signifikansnivå.

Oppgave 2:

Fortsettelse oppgave 1 øving 4.
Gå tilbake til oppgave 1 øving 4. Vi viste der at beste forventningsrette estimator var: $\hat{\mu} = \frac{6}{7}\bar{X} + \frac{1}{7}\bar{Y}$.

- c) Ta utgangspunkt i estimatoren $\hat{\mu}$ og utled et 95% konfidensintervall for μ .
Regn ut hva intervallet blir når målingene gav $\bar{x} = 6.12$ og $\bar{y} = 6.05$.

Vannet hvor målingene ble gjort har tidligere vært surt, men man har nylig kallek vannet. Målet med kalkingen var å få pH-verdien, μ , over 6.0. Har man lyktes med dette?

- d) Formuler problemstillingen som en hypotesetest. Utfør testen og konkluder når målingene ble som i punkt c). Bruk 5% signifikansnivå.

Oppgave 3:

Anta at alarmer til en brannstasjon som krever utrykning ankommer som en Poisson-prosess. Basert på informasjon om tidene mellom slike alarmer ønsker vi å anslå parameteren λ , forventet antall alarmer per time, i Poisson-prosessen. Vi vet da at tidene mellom alarmer, $T_1, \dots, T_n$ vil være eksponensialfordelt med forventningsverdi $1/\lambda$. Dvs sannsynlighetstettheten er gitt ved

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

- a) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for λ blir $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n T_i}$.
Regn ut estimatet når man har observert 12 etterfølgende tider mellom alarmer som ble: 10.3, 5.5, 18.0, 12.1, 9.1, 1.2, 5.6, 18.6, 7.7, 3.9, 9.9 og 6.6.
- b) Vis at $Z = 2\lambda \sum_{i=1}^n T_i$ er χ_{2n}^2 -fordelt. (Hint: Se side 7 i notatene om konf.int..)

Det kan vises at dersom $Z \sim \chi_{2n}^2$ så er $E(\frac{1}{Z}) = \frac{1}{2(n-1)}$

- c) Bruk resultatene over til å regne ut $E(\hat{\lambda})$.
Er $\hat{\lambda}$ forventningsrett? Dersom ikke, kan du foreslå en modifisert estimator som vil være forventningsrett?
- d) Ta utgangspunkt i estimatoren $\lambda^* = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^n T_i}$ og resultatet fra 3b) og bruk dette til å utlede et 95% konfidensintervall for λ . Regn ut hva intervallet blir med målingene gitt i punkt 3a).
(Hint: $Z = 2\lambda \sum_{i=1}^n T_i = 2\lambda(n-1) \sum_{i=1}^n T_i / (n-1) = 2\lambda(n-1)/\lambda^*$)

Noen fasitsvar:

8.5:10/8.26: a) 0.0062, b) 0.0668, c) 0.3413 ; **9.7:15/9.15:** [47.72, 49.28]

9.13:6: [1.26, 5.41] ; **9.76:** [1.12, 2.33]

10.10:7/10.25: Forkaster ikke H_0 ($t = 0.77$) ; **10.13:2/10.68:** Forkaster ikke H_0 ($\chi^2 = 10.74$).

1: b) 0.0351; d) [0.269, 0.325] ; **2:** c) [6.05, 6.17]; d) Forkaster H_0 ($z = 3.76$).

3: a) 0.11, c) $\lambda_{\frac{n}{n-1}}$, forventningsrett estimator: $\frac{n-1}{\sum_{i=1}^n T_i}$, d) [0.057, 0.181]