

Øving 4

Læreboka, 8. utgave: Oppgave 8.13, 8.14, 8.21, 9.81*, 9.82, 7.7 og 7.9

Læreboka, 7. utgave: Kap. 8.2: Oppgave 13, 14
 Kap. 8.5: Oppgave 5
 Kap. 9.15: Oppgave 1*, 2
 Kap. 7.3: Oppgave 7, 9

*) At $x_1, \dots, x_n$ er utfall fra en Bernoulli-prosess betyr at $x_1, \dots, x_n$ er utfall av 0-1 variable $X_1, \dots, X_n$ med fordeling $f(x) = p^x(1-p)^{(1-x)}$, $x = 0, 1$

Oppgave 1:

For å fastslå pH-verdien i et vann best mulig har man gjort en serie med målinger. De 10 første målingene, $X_1, \dots, X_{10}$, ble utført med et apparat hvor man vet at resultatet av målingene er $N(\mu, 0.01)$ -fordelt. Her er μ den ukjente pH-verdien vi ønsker å anslå.

Etter 10 målinger sluttet dette apparatet å fungere, men man gjorde i tillegg 15 målinger $Y_1, \dots, Y_{15}$ med et reserveapparat hvor målingene er $N(\mu, 0.09)$ -fordelt.

Man lurte etterpå hvordan man skulle kombinere resultatene fra de to måleseriene til en best mulig estimator for μ . To estimatorer ble foreslått:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{25} \left(\sum_{i=1}^{10} X_i + \sum_{i=1}^{15} Y_i \right) \quad \text{og} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{6}{7} \bar{X} + \frac{1}{7} \bar{Y}$$

- a) Vis at begge estimatorene er forventningsrette.
 Regn ut begge estimatorenes varians.
 Hvilken estimator er best?

Finnes det enda bedre estimatorer?

- b) Ta utgangspunkt i estimatoren $\hat{\mu} = a\bar{X} + b\bar{Y}$, og finn de verdiene a og b som gir den beste mulige forventningsrette estimatoren.

Oppgave 2:

La X være eksponensialfordelt med forventning β . Dvs

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0,$$

- a) Bruk transformasjonsformelen til å finne fordelingen til $Y = 2X/\beta$.
 Vis at denne fordelingen er en χ^2_2 -fordeling.

Anta nå at vi har n uavh. eksponensialfordelte variable $X_1, \dots, X_n$ med forventning β .

- b) Bruk resultatet om fordelingen til summer av χ^2 -fordelte variable på side 34/35 i formelsamlingen til å finne fordelingen til $Z = \sum_{i=1}^n Y_i = 2(\sum_{i=1}^n X_i)/\beta$
- c) Bruk transformasjonsformelen til å finne fordelingen til $V = \sum_{i=1}^n X_i$.
 Hvilken kjent fordeling er dette?
 Hvilket kjent resultat fra pensum er det vi har vist nå?

Oppgave 3:

To ulike metoder brukes til å måle oljekonsentrasjon i vannet nær en borerigg. La μ betegne den sanne oljekonsentrasjonen i vannet (målt i passende enheter). Det er kjent at første målemetode gir måleresultater som er normalfordelte med forventning μ og standardavvik σ_1 , og andre målemetode gir måleresultater som er normalfordelte med forventning μ og standardavvik σ_2 .

- a) Dersom $\mu = 4.3$ og $\sigma_1 = 0.5$, hva er sannsynligheten for at første målemetode gir en verdi under 4.0?
 Hva er sannsynligheten for at andre målemetode gir en verdi større enn $\mu + \sigma_2$?

La X_1 betegne resultatet av en måling med metode 1 og X_2 betegne resultatet av en måling med metode 2. Vi ønsker å kombinere resultatene av to slike målinger til en felles estimator for μ . Anta at X_1 og X_2 er uavhengige og at σ_1 og σ_2 er kjente.

- b) Vis at sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) for μ basert på de to målingene er

$$\hat{\mu} = \frac{\sigma_2^2 X_1 + \sigma_1^2 X_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

- c) Undersøk om estimatoren $\hat{\mu}$ er forventningsrett.
 Vis at variansen til estimatoren kan uttrykkes:

$$\text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

- d) Ta utgangspunkt i estimatoren $\hat{\mu}$, og utled et 95% konfidensintervall for oljekonsentrasjonen μ . (Hint: Husk at X_1 og X_2 er normalfordelte og at σ_1 og σ_2 antas kjente.)
 Regn ut intervallet numerisk når $x_1 = 4.41$, $x_2 = 4.19$, $\sigma_1 = 0.5$ og $\sigma_2 = 0.2$.

Noen fasitsvar:

8.2:13/8.13 0.585; **8.5:5/8.21** Ja; **9.15:1/9.81** $\sum_{i=1}^n X_i/n$

9.15:2/9.82 a) $(\alpha/\beta)^n e^{-\alpha \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1}$;

b) $n/\alpha - \sum_{i=1}^n x_i^\beta = 0$ $n/\beta - \alpha \sum_{i=1}^n x_i^\beta \ln(x_i) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0$

7.3:7/7.7 $\frac{\sqrt{2k}}{m^{3/2}} w^{\frac{3}{2}-1} \exp(-\frac{2b}{m} w)$; **7.3:9/7.9** a) $32/y^3$, $y > 4$ b) $1/4$;

1 a) 0.00232 og 0.000857, dvs $\hat{\mu}_2$ best; b) $a = 6/7$ og $b = 1/7$; **2** c) Gammafordeling med $\alpha = n$ og $\beta = \beta$;

3 a) 0.2743 og 0.1587, d) [3.86, 4.58]