Løsningsforslag øving 3

Oppgaver fra boka:

6.40 / 6.10: 2

X=vannforbruk er gammafordelt med $\alpha = 2$ og $\beta = 3$.

$$\begin{aligned} P(X > 9) &= \int_9^\infty \frac{1}{3^2\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-x/3} dx = \frac{1}{9}\int_9^\infty x e^{-x/3} dx \\ &= \frac{1}{9}[x(-3)e^{-x/3}]_9^\infty - \frac{1}{9}\int_9^\infty -3e^{-x/3} dx \\ &= \frac{1}{9} 27 e^{-3} + \frac{1}{9}[-9e^{-x/3}]_9^\infty = 3e^{-3} + e^{-3} = 4e^{-3} = \underline{\underline{0.199}} \end{aligned}$$

6.43 / 6.10: 5

a) $\mathrm{E}(X) = \alpha\beta = 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$ og $\mathrm{Var}(X) = \alpha\beta^2 = 2 \cdot 3^2 = \underline{\underline{18}}$.

6.46 / 6.10: 8

Levetid T for bryter eksponentialfordelt med forventning $\beta = 2$ år.

Sannsynlighet for at én av bryterne svikter i løpet av ett år:

$$P(T < 1) = \int_0^1 \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}} dt = [-e^{-\frac{t}{\beta}}]_0^1 = 1 - e^{-\frac{1}{\beta}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0.3935$$

Innstallerer 100 brytere. X = antall brytere som svikter 1. år.

$X \sim B(100, 0.3935)$

Den enkleste måten å gå frem videre på er å bruke tilnærming til normalfordeling (god tilnærming her siden $np = 100 \cdot 0.3935 > 5$ og $n(1-p) = 100 \cdot (1 - 0.3935) > 5$). Vi bruker da at

$$Z = \frac{X - \mathrm{E}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X - 100 \cdot 0.3935}{\sqrt{100 \cdot 0.3935 \cdot (1 - 0.3935)}} \approx N(0,1)$$

$$P(X \le 30) \approx P(Z < \frac{30 + 0.5 - 39.35}{4.8852}) = P(Z < -1.81) = \underline{\underline{0.0351}}$$

6.47 / 6.10: 9

a) For Weibullfordeling med parametre α og β har vi at $\mathrm{E}(X) = \alpha^{-1/\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$. Dvs

$$\mathrm{E}(X) = 0.5^{-1/2}\Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \sqrt{2} \cdot \Gamma(\frac{3}{2}) = \sqrt{2}(\frac{3}{2} - 1)\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{1.25}}$$

b)

$$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} = x e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad, x \ge 0 \qquad \text{som gir at:}$$

$$P(X > 2) = \int_2^\infty x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = [-e^{-\frac{1}{2}x^2}]_2^\infty = e^{-\frac{1}{2}2^2} = e^{-2} = \underline{\underline{0.135}}$$

6.54 / 6.10: 16

Vi bruker at når X er lognormalfordelt så er $\ln(X)$ normalfordelt og får:

$$\begin{aligned} P(X > 270) &= 1 - P(X \le 270) = 1 - P(\ln(X) \le \ln(270)) \\ &= 1 - P(\frac{\ln(X) - 4}{2} \le \frac{\ln(270) - 4}{2}) \\ &= 1 - P(Z \le 0.80) = 1 - 0.7881 = \underline{\underline{0.2119}} \end{aligned}$$

6.55 / 6.10: 17

For lognormalfordeling har vi at $\mathrm{E}(X) = e^{\mu + \sigma^2/2}$ og $\mathrm{Var}(X) = e^{2(\mu+\sigma^2)} - e^{2\mu+\sigma^2}$ som her gir at

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= e^{4+2^2/2} = e^6 = \underline{\underline{403.4}} \\ \mathrm{Var}(X) &= e^{2(4+2^2)} - e^{2\cdot 4 + 2^2} = e^{16} - e^{12} = \underline{\underline{8723355.7}} \end{aligned}$$

6.56 / 6.10: 18

a) La X være antall biler som kommer til krysset i løpet av et minutt. Fra opplysningene i oppgaven har vi at X er Poisson-fordelt med forventning 5 slik at:

$$P(X > 10) = 1 - P(X \le 10) \overset{tabell}{=} 1 - 0.9863 = \underline{\underline{0.0137}}$$

b) Her skal vi regne ut sannsynligheten for at det går mer enn 2 minutter før det er kommet 10 biler til krysset. Dette kan regnes ut på to måter.

Den ene (og enkleste) måten å regne ut dette på er å definere Y som antall hendelser i intervallet $[0,2]$ og regne ut $P(Y < 10)$ (at det tar mer enn 2 minutter før bil nummer 10 kommer er det samme som at det kommer færre enn 10 biler i løpet av de 2 minuttene). Vi har at Y er Poisson-fordelt med forventning $\lambda t = 5 \cdot 2 = 10$ og får:

$$P(X < 10) = P(X \le 9) \overset{tabell}{=} \underline{\underline{0.458}}$$

Den andre måten er å definere S_{10} som tid til bil nummer 10 kommer til krysset og regne ut $P(S_{10} > 2)$. Vi vet at tid til hendelse nummer 10 i en Poisson-prosess med $\lambda = 5$ er gamma-fordelt med parametre $\alpha = 10$ og $\beta = 1/5$ (sum av 10 eksponensialfordelte variable med forventning $1/5$). Vi får da:

$$\begin{aligned} P(S_{10} > 2) &= 1 - P(S_{10} \le 2) = 1 - \int_0^2 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} s^{\alpha-1} e^{-s/\beta} ds \\ &= 1 - \int_0^2 \frac{1}{(\frac{1}{5})^{10}\Gamma(10)} s^{10-1} e^{-5s} ds \overset{u=5s}{=} 1 - \int_0^{10} \frac{5^{10}}{\Gamma(10)} (\frac{u}{5})^{10-1} e^{-u} du/5 \\ &= 1 - \int_0^{10} \frac{u^{10-1}}{\Gamma(10)} e^{-u} du \overset{tabellA.24}{=} 1 - 0.542 = \underline{\underline{0.458}} \end{aligned}$$

6.57 / 6.10: 19

Tid mellom hendelser i en Poisson-prosess er eksponensialfordelt med forventningsverdi $1/\lambda = 1/5$.

a)

$$P(X > 1) = 1 - \int_0^1 5e^{-5x}dx = 1 - [-e^{-5x}]_0^1 = 1 + e^{-5} - 1 = \underline{\underline{0.0067}}$$

b) $\mathrm{E}(X) = \beta = 1/5 = \underline{\underline{0.2}}$

Oppgaver fra notatet om ordningsvariable og ekstremvariable:

Oppgave 1:

Vi har et paralellsystem av to uavhengige komponenter, hvor levetiden til hver av komponentene er eksponensialfordelt med parameter λ.

$$F_{X_i}(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$$

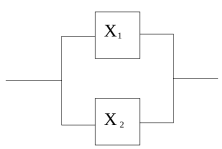

Figure 1: Paralellkopling av to komponenter

Vi lar levetiden til systemet betegnes ved V. Vi skal først finne fordelingen til V. Systemet fungerer dersom minst en av komponentene fungerer.

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V < v) = P(\max(X_1, X_2) < v) = P(X_1 < v \cap X_2 < v) \\ &\overset{Uavh.}{=} P(X_1 < v) \cdot P(X_2 < v) = (1 - e^{-\lambda v})^2 \\ &= 1 - 2e^{-\lambda v} + e^{-2\lambda v} \\ f_V(v) &= F_V'(v) = 2\lambda e^{-\lambda v} - 2\lambda e^{-2\lambda v} = \underline{\underline{2\lambda(e^{-\lambda v} - e^{-2\lambda v})}} \quad , v \geq 0 \end{aligned}$$

Forventningsverdi:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(V) &= \int_0^\infty v f_V(v)dv = \int_0^\infty v 2\lambda(e^{-\lambda v} - e^{-2\lambda v})dv \\ &= 2\int_0^\infty v\lambda e^{-\lambda v} - \int_0^\infty v 2\lambda e^{-2\lambda v} = 2\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \underline{\underline{\frac{3}{2\lambda}}} \end{aligned}$$

Merk at vi "kjenner igjen" de to siste integralene som uttrykkene for forventningsverdien for eksponensialfordelte variable med hhv parameter λ og 2λ, og dermed vet hva de blir.

Oppgave 2:

Vi har et seriesystem av n uavhengige komponenter hvor levetiden til komponent i er Weibullfordelt med parametre α og β:

$$P(X_i \leq x) = F_{X_i}(x) = 1 - e^{-\alpha x^\beta} \quad , x \geq 0$$

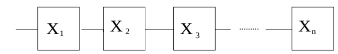

Figure 2: Seriekopling av n komponenter

Vi lar levetiden til systemet betegnes ved U. Vi skal først finne fordelingen til U. Systemet fungerer kun dersom alle komponentene fungerer.

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U < u) = P(\min(X_1, X_2, ..., X_n) < u) = 1 - P(\min(X_1, X_2, ..., X_n) > u) \\ &\overset{Uavh.}{=} 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > u) = 1 - \prod_{i=1}^n e^{-\alpha u^\beta} = \underline{\underline{1 - e^{-n\alpha u^\beta}}} \end{aligned}$$

Vi ser at dette er en $\underline{\underline{\text{Weibullfordeling med parametre } n\alpha \text{ og } \beta.}}$

For Weibullfordeling med parametre α og β har vi at $\mathrm{E}(X) = \alpha^{-1/\beta}\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})$. Dvs for en enkelt komponent har vi at

$$\mathrm{E}(X) = 0.1^{-1/0.5}\Gamma(1 + \frac{1}{0.5}) = 100 \cdot \Gamma(3) = 100 \cdot 2! = \underline{\underline{200}}$$

For hele systemet får vi

$$\mathrm{E}(U) = (n \cdot 0.1)^{-1/0.5}\Gamma(1 + \frac{1}{0.5}) = \frac{1}{n^2}100 \cdot \Gamma(3) = \underline{\underline{\frac{200}{n^2}}}$$

Oppgave 1:

Regner først ut den kumulative fordelingsfunksjonen til X:

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{for} \quad x > 0$$

Skal finne sannsynlighetstettheten til $V = \max(X_1, X_2)$ og regner først ut fordelingsfunksjonen:

$$\begin{aligned} F_V(v) = P(\max(X_1, X_2) \leq v) &= P(X_1 \leq v \cap X_2 \leq v) \\ &\overset{uavh}{=} P(X_1 \leq v)P(X_2 \leq v) \\ &= F_X(v)^2 = (1 - e^{-\lambda v})^2 = 1 - 2e^{-\lambda v} + e^{-2\lambda v} \end{aligned}$$

Dvs. sannsynlighetstettheten til V blir:

$$f_V(v) = F'(v) = \underline{\underline{2\lambda e^{-\lambda v} - 2\lambda e^{-2\lambda v}}}$$

$$\begin{aligned} E(V) = \int_0^\infty v(2\lambda e^{-\lambda v} - 2\lambda e^{-2\lambda v})dv &= 2\int_0^\infty v\lambda e^{-\lambda v}dv - \int_0^\infty v2\lambda e^{-2\lambda v}dv \\ &= 2\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \underline{\underline{\frac{3}{2\lambda}}} \end{aligned}$$

Vi har at $E(X) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$, dvs. vi har at $\underline{\underline{E(X) < E(V) < 2E(X)}}$ som ventet da V er den største av to X-er. Siden $V = \max(X_1, X_2)$ vil vi forvente at $E(V) > E(X)$ og at $E(V) < E(X_1 + X_2) = 2E(X)$.

Oppgave 2:

a) Finner først:

$$F_X(x) = \int_0^x 0.02ue^{-0.01u^2}du = [-e^{-0.01u^2}] = 1 - e^{-0.01x^2}$$

Har videre:

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U < u) = P(\min(X_1, X_2, X_3) < u) = 1 - P(\min(X_1, X_2, X_3) > u) \\ &\overset{Uavh.}{=} 1 - P(X_1 > u)\cdot P(X_2 > u)\cdot P(X_3 > u) = 1 - [1 - F_X(u)]^3 \\ &= 1 - [e^{-0.01u^2}]^3 = \underline{\underline{1 - e^{-0.03u^2}}} \end{aligned}$$

Eventuelt kan vi også regne ut sanns. tettheten:

$$f_U(u) = F'_U(u) = \underline{\underline{0.06ue^{-0.03u^2}}} \quad , u > 0$$

b)

$$\begin{aligned} P(X < 5) &= F_X(5) = 1 - e^{-0.01\cdot 5^2} = \underline{\underline{0.221}} \\ P(U < 5) &= F_U(5) = 1 - e^{-0.03\cdot 5^2} = \underline{\underline{0.528}} \end{aligned}$$

c) Dersom vi sammenligner sannsynlighetstetthetene i a) med Weibull-fordelingen,

$$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha x^\beta} \quad , x \geq 0,$$

ser vi at X er Weibullfordelt med $\alpha = 0.01$ og $\beta = 2$, mens U er Weibullfordelt med $\alpha = 0.03$ og $\beta = 2$. Fra uttrykket for forventningsverdien i Weibullfordelingen, $E(X) = \alpha^{-1/\beta}\Gamma(1+\frac{1}{\beta})$ får vi da

$$\begin{aligned} E(X) &= 0.01^{-1/2}\Gamma(1+\frac{1}{2}) = 0.01^{-1/2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = 0.01^{-1/2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \underline{\underline{8.86}} \\ E(U) &= 0.03^{-1/2}\Gamma(1+\frac{1}{2}) = 0.03^{-1/2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = 0.03^{-1/2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \underline{\underline{5.12}} \end{aligned}$$

Oppgave 3:

a) Antall telefoner per time er Poissonfordelt med forventning $\mu = \lambda t = 6\cdot 1 = 6$, dvs

$$P(X > 6) = 1 - P(X \leq 6) \overset{\text{tabell}}{=} 1 - 0.6063 = \underline{\underline{0.3937}}$$

b) Tid til første hendelse i en Poisson-prosess er eksponensialfordelt med forventning $1/\lambda = 1/6$. Merk også at 10 minutter er 1/6 time. Dvs

$$P(T < 1/6) = \int_0^{1/6} 6e^{-6x}dx = [-6e^{-6x}]_0^{1/6} = -e^{-1} + 1 = \underline{\underline{0.6321}}$$

(Alternativt kan oppgaven løses ved å se på sannsynligheten for minst en hendelse i et 10-minuttsintervall)

c) Tid til andre hendelse i en Poisson-prosess er gammafordelte med parametre $\alpha = 2$ og $\beta = 1/\lambda = 1/6$. Siden 20 minutter er 1/3 time får vi da:

$$\begin{aligned} P(S_2 < 1/3) &= \int_0^{1/3} \frac{1}{(1/6)^2\Gamma(2)}x^{2-1}e^{-x/(1/6)}dx = \int_0^{1/3} 36xe^{-6x}dx \\ &= [-6xe^{-6x}]_0^{1/3} - \int_0^{1/3}(-6e^{-6x})dx \\ &= -2e^{-2} - [e^{-6x}]_0^{1/3} = -2e^{-2} - e^{-2} + 1 = \underline{\underline{0.5940}} \end{aligned}$$

Alternativt kan vi løse oppgaven ved å definere Y=antall telefoner i [0,1/3], Y er da Poissonfordelt med forventning $\mu = \lambda t = 6\cdot(1/3) = 2$. Dersom det tar mindre enn 20 minutter til andre telefon, betyr dette at det kommer minst 2 telefoner i løpet av de 20 første minuttene (1/3 time) og vi får:

$$P(S_2 < 1/3) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) \overset{\text{tabell}}{=} 1 - 0.4060 = \underline{\underline{0.5940}}$$

d) Antall telefoner i løpet av 7.5 timer er Poissonfordelt med forventning $\mu = \lambda t = 6\cdot 7.5 = 45$. Vi kan i prinsippet bruke dette til å regne ut $P(X > 50)$ eksakt, men her er det enklere å bruke tilnærming til normalfordeling. Siden $\mu > 15$ er normaltilnærmingen god, og vi får

$$\begin{aligned} P(X > 50) &= 1 - P(X \leq 50) = 1 - P(\frac{X-45}{\sqrt{45}} \leq \frac{50+0.5-45}{\sqrt{45}}) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.82) = 1 - 0.7939 = \underline{\underline{0.2061}} \end{aligned}$$

e) Antall hendelser i ethvert intervall av lengde t i en Poisson-prosess er Poissonfordelt med forventning λt, dvs antall telefoner i løpet av 10 minutt = 1/6 time er Poissonfordelt med forventning $\mu = 6\cdot(1/6) = 1$, dvs

$$P(X = 0) = \frac{1^0}{0!}e^{-1} = \underline{\underline{0.3679}}$$

f) Siden Poisson-prosessen er "hukommelsesløs" har hva som har skjedd de foregående 10 minuttene ingen innflytelse på hva som kommer til å skje de neste 10 minuttene - dvs sannsynligheten for ingen telefoner de neste 10 minuttene er den samme som sannsynligheten for ingen telefoner i et vilkårlig 10 minutts intervall, dvs $\underline{\underline{0.3679}}$.

g) La T være funksjonstiden. T er da eksponensialfordelt med forventning 6.5, og vi skal finne $P(T > 2.1+4|T > 2.1)$. Pga at eksponensialfordelingen er "hukommelsesløs" er dette det samme som $P(T > 4)$, og vi får

$$P(T > 4) = \int_4^\infty \frac{1}{6.5}e^{-t/6.5}dt = [-e^{-t/6.5}]_4^\infty = e^{-4/6.5} = \underline{\underline{0.54}}.$$