Matematisk statistikk høsten 2008.

Løsningsforslag øving 2

Oppgaver fra boka:

5.60 / 5.6: 10

La X være antall orkaner per år, og anta $X \sim \text{Poisson}(6)$.

a)

$$P(X < 4) = P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} \frac{6^x}{x!} e^{-6} \overset{\text{tabell}}{=} 0.1512$$

Eller ved direkte utregning:

$$P(X < 4) = P(X \leq 3) = \frac{6^0}{0!}e^{-6} + \frac{6^1}{1!}e^{-6} + \frac{6^2}{2!}e^{-6} + \frac{6^3}{3!}e^{-6} = 0.1512$$

b)

$$\begin{aligned} P(6 \leq X \leq 8) &= P(X \leq 8) - P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{8} \frac{6^x}{x!}e^{-6} - \sum_{x=0}^{5} \frac{6^x}{x!}e^{-6} \\ &\overset{\text{tabell}}{=} 0.8472 - 0.4457 = 0.4015 \end{aligned}$$

5.65 / 5.6: 15

La X="antall av de 10000 skjemaene som inneholder en feil". Vi gjør da $n = 10000$ uavhengige enkeltforsøk der vi i hvert forsøk sjekker om skjemaet inneholder en feil eller ikke og sannsynligheten for å finne et skjema med feil er den samme, $p = 1/1000$, i hvert forsøk. Dvs $X \sim B(10000, 0.001)$. Siden vi her har en situasjon med stor n og liten p kan vi bruke tilnærming til Poissonfordeling (gjør regningen enklere). X vil være tilnærmet Poissonfordelt med forventning $\mu = np = 10000 \cdot 0.001 = 10$

$$P(6 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 5) \overset{\text{tabell}}{=} 0.3328 - 0.0671 = \underline{\underline{0.2657}}$$

5.94 / 5.review: 14

a) X="antall av 10 boringer som gir suksess" er binomisk fordelt, $X \sim B(10, 0.25)$, slik at

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0.25^1 (1 - 0.25)^{10-1} = \underline{\underline{0.1877}}$$

b) Y="antall boringer til første suksess" er geometrisk fordelt fordi hver boring gir suksess eller ikke uavhengig av tidligere boringer og sannsynligheten for suksess er den samme i hver boring, $p = 0.25$.

$$P(Y = 10) = 0.75^9 \cdot 0.25 = \underline{\underline{0.0188}}$$

Dvs sannsynligheten for første suksess i 10. forsøk er 0.0188 (og det er dette boka egentlig mente å spørre om).

Men dersom vi ser på sannsynligheten for å gå konkurs, som boka faktisk spørr om, så må vi tenke på at selskapet også gå konkurs dersom første suksess ikke kommer før enn i 11. forsøk, 12. forsøk, osv. (dårlig formulert oppgavetekst), dvs

$$\begin{aligned} P(\text{konkurs}) &= P(Y \geq 10) = 1 - P(Y \leq 9) = 1 - \sum_{i=1}^{9} 0.75^{i-1} \cdot 0.25 \\ &= 1 - 0.25 \cdot \sum_{k=0}^{8} 0.75^k \overset{tabells.33}{=} 1 - 0.25 \cdot \frac{1 - 0.75^9}{1 - 0.75} \\ &= 1 - 0.925 = \underline{\underline{0.075}} \end{aligned}$$

Alternativt kan vi bruke at $P(Y \geq 10)$ er det samme som sannsynligheten for ikke å finne olje i ni forsøk og så regne ut denne sannsynligheten ved binomisk fordeling: $0.75^9 = \underline{\underline{0.075}}$

5.96 / 5.review: 16

La Y="antall barn til andre gutt". Y er da negativt binomisk fordelt med $k = 2$ og $p = 0.5$.

$$P(Y = 4) = \binom{4-1}{2-1} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^{4-2} = \underline{\underline{0.1875}}$$

6.11 / 6.4: 11

$X \sim N(24, 3.8^2)$

a)

$$\begin{aligned} P(X \geq 30) &= 1 - P(X < 30) = 1 - P\left(\tfrac{X-24}{3.8} < \tfrac{30-24}{3.8}\right) = 1 - P(Z < 1.58) \\ &= 1 - 0.9429 = \underline{\underline{0.0571}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= 1 - P(X < 15) = 1 - P\left(\frac{X-24}{3.8} < \frac{15-24}{3.8}\right) \\ &= 1 - P(Z < -2.37) = 1 - 0.0089 = 0.9911 \end{aligned}$$

Dvs han kommer for sent $\underline{\underline{99.11\%}}$ av dagene.

c)

$$\begin{aligned} P(X \geq 25) &= 1 - P(X < 25) = 1 - P\left(\frac{X-24}{3.8} < \frac{25-24}{3.8}\right) = 1 - P(Z < 0.26) \\ &= 1 - 0.6026 = \underline{\underline{0.3974}} \end{aligned}$$

d) k = tid til jobben, hvor 15% av turene tar lenger tid.

$P(X \geq k) = 1 - P(X < k) = 1 - P(\frac{x-24}{3.8} < \frac{k-24}{3.8}) = 1 - P(Z < \frac{k-24}{3.8}) = 0.15$

$P(Z < \frac{k-24}{3.8}) = 0.85$

$\frac{k-24}{3.8} = 1.04 \quad \Rightarrow \quad k = 3.8 \cdot 1.04 + 24 = 27.95 = \underline{\underline{27 \text{ min., } 57 \text{ sek.}}}$

e) Y = antall av 3 neste turer som tar mer enn 30 min.

$p = P(X \geq 30) = 0.057$

$Y \sim B(3, 0.057)$

$P(Y = 2) = (\genfrac{}{}{0pt}{}{3}{2})0.057^2(1-0.057)^{3-2} = 3 \cdot 0.057^2 \cdot 0.943 = \underline{\underline{0.0092}}$

Oppgave 1:

a) Vi har

- $n = 12$ uavhengige enkeltforsøk (12 pasienter som blir smittet eller ikke uavhengig av hverandre).
- Sjekker kun "suksess" eller ikke "suksess" i hvert enkeltforsøk (om hver pasient blir smittet eller ikke)
- Sannsynligheten for "suksess" er den samme i alle enkeltforsøk, $p = 0.25$ (alle pasientene antas å ha samme sannsynlighet for å bli smittet).

Dvs, de tre betingelsene for binomisk fordeling er oppfylte, og vi har dermed at X = "antall av de 12 pasientene som blir smittet" er binomisk fordelt med parametre $n = 12$ og $p = 0.25$, $X \sim B(12, 0.25)$.

b) $P(X = x) = (\genfrac{}{}{0pt}{}{12}{x})(0.25)^x(0.75)^{12-x}$ som gir $P(X = 0) = (\genfrac{}{}{0pt}{}{12}{0})(0.25)^0(0.75)^{12} = \underline{\underline{0.032}}$.

Videre er $P(X = 1) = (\genfrac{}{}{0pt}{}{12}{1})(0.25)^1(0.75)^{11} = 0.127$ og dermed:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - 0.032 - 0.127 = \underline{\underline{0.841}}.$$

c) $\mathrm{E}(X) = np = 12 \cdot 0.25 = \underline{\underline{3}}$, og $SD(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{12 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = \underline{\underline{1.5}}$.

Oppgave 2:

a) Med $\mu = \lambda t = 2 \cdot 1$ får vi $P(X = x) = \frac{2^x}{x!}e^{-2}$ som gir $P(X = 2) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} = \underline{\underline{0.271}}$. Videre blir $P(X = 0) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} = 0.135$ og $P(X = 1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 0.271$, og dermed

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] \\ &= 1 - 0.135 - 0.271 - 0.271 = \underline{\underline{0.323}}. \end{aligned}$$

Eventuelt kan $P(X \leq 2)$ finnes fra tabell.

b) Når vi ser på en periode på 0.5 år får vi at antall ulykker er Poissonfordelt med $\mu = \lambda t = 2 \cdot 0.5 = 1$, dvs $P(X = 2) = \frac{1^2}{2!}e^{-1} = \underline{\underline{0.184}}$

c) Over en tiårsperiode er antall ulykker Poissonfordelt med $\mu = \lambda t = 2 \cdot 10 = 20$, dvs $P(X = x) = \frac{20^x}{x!}e^{-20}$. Vi kan bruke dette til å regne ut $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19)$ eksakt, men her er det mer hensiktsmessig å bruke tilnærming til normalfordeling. Siden $\mu > 15$ er normaltilnærmingen god, og vi får

$$\begin{aligned} P(X \geq 20) &= 1 - P(X \leq 19) = 1 - P(\frac{X - 20}{\sqrt{20}} \leq \frac{19 + 0.5 - 20}{\sqrt{20}}) \\ &= 1 - P(Z \leq -0.11) = 1 - 0.4562 = \underline{\underline{0.5438}} \end{aligned}$$

d)

$$P(X > 2 | X \geq 1) = \frac{P(X > 2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X > 2)}{1 - P(X = 0)} = \frac{P(X \geq 3)}{1 - 0.135} = \frac{0.323}{0.865} = \underline{\underline{0.373}}.$$

Oppgave 3:

$$\begin{aligned} P(X_1 > 800) &= 1 - P(X_1 \leq 800) = 1 - P(Z \leq \frac{800 - 750}{25}) \\ &= 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0.9772 = \underline{\underline{0.0228}} \\ P(X_1 \leq 800 | X_2 > 750) &\overset{uavh.!}{=} P(X_1 \leq 800) = \underline{\underline{0.9772}} \\ P(X_1 + X_2 > 1600) &= 1 - P(X_1 + X_2 \leq 1600) \\ &= 1 - P(\frac{X_1 + X_2 - \mathrm{E}(X_1 + X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1 + X_2)}} \leq \frac{1600 - \mathrm{E}(X_1 + X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1 + X_2)}}) \\ &= 1 - P(Z \leq \frac{1600 - 2 \cdot 750}{\sqrt{2 \cdot 25^2}}) = 1 - P(Z \leq 2.83) \\ &= 1 - 0.9977 = \underline{\underline{0.0023}} \end{aligned}$$

Oppgave 4:

a)

$$\begin{aligned}
P(X < 7.5) &= P(Z < \frac{7.5-8.2}{0.4}) = P(Z < -1.75) = \underline{\underline{0.04}} \\
P(X > 8.2|X > 7.5) &= \frac{P(X > 8.2 \cap X > 7.5)}{P(X > 7.5)}) = \frac{P(X > 8.2)}{1-0.04} = \frac{1-P(Z \le 0)}{0.04} = \frac{0.5}{0.96} = \underline{\underline{0.52}}
\end{aligned}$$

b)

Vi har en situasjon med

- Uavhengige enkeltforsøk inntil vi har 20 “suksesser” (bjelker som tåler 7.5 tonn).
- Vi sjekker “suksess” eller ikke “suksess” (kan bære 7.5 tonn eller ikke) i hvert forsøk.
- Sannsynligheten for “suksess” den samme i alle forsøk, $p = P(X > 7.5) = 1 - 0.04 = 0.96$.

Y er da $\underline{\underline{\text{negativt binomisk fordelt med } k = 20 \text{ og } p = 0.96}}$.

$$\begin{aligned}
P(Y < 22) &= P(Y \le 21) = P(Y = 20) + P(Y = 21) \\
&= (\genfrac{}{}{0pt}{}{20-1}{20-1})0.96^{20}(1-0.96)^{20-20} + (\genfrac{}{}{0pt}{}{21-1}{20-1})0.96^{20}(1-0.96)^{21-20} \\
&= 0.442 + 0.354 = \underline{\underline{0.796}}
\end{aligned}$$

$$\text{E}(Y) = \frac{k}{p} = \frac{20}{0.96} = \underline{\underline{20.8}}$$

Oppgave 5:

a)

$$\begin{aligned}
\text{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x\frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}dx \\
&= [-xe^{-x/\beta}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x/\beta}dx \\
&= 0 - [\beta e^{-y/\beta}]_0^{\infty} = \underline{\underline{\beta}} \\
\text{E}(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2\frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}dx \\
&= [-x^2e^{-x/\beta}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 2x(-e^{-x/\beta})dx \\
&= 0 + 2\beta\int_0^{\infty} x\frac{1}{\beta}e^{-x/\beta}dx = 2\beta^2 \\
\Rightarrow \text{Var}(X) &= \text{E}(X^2) - \text{E}(X)^2 = 2\beta^2 - \beta^2 = \underline{\underline{\beta^2}}
\end{aligned}$$

b) Med $\beta = 1000$ blir

$$P(X > 1000) = \int_{1000}^{\infty} \frac{1}{1000}e^{-x/1000}dx = [-e^{-x/1000}]_{1000}^{\infty} = e^{-1} = \underline{\underline{0.368}}$$