Ordningsvariable og ekstremvariable.

Dekkes av notatet om ordningsvariable og ekstremvariable.

Anta at vi har $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uavh. identisk fordelte stok. var. med kumulativ fordelingsfunksjon $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Sorter $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slik at: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$. Dette kalles *ordningsvariable.* Spesielt er

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ X_{(n)} &= \max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

og disse kalles *ekstremvariable.*

Eksempel på ekstremvariable: Levetid til hhv seriesystem og parallellsystem. Maksimal bølgehøyde eller maksimal vindstyrke i et tidsintervall, etc.

Fordelingen til $U = X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ (f.eks. seriesystem):

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) \\ &= P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq u) \\ &= 1 - P(\min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > u) \\ &= 1 - P((X_1 > u) \cap \ldots \cap (X_n > u)) \\ &\stackrel{uavh.}{=} 1 - P(X_1 > u) \cdots P(X_n > u) \\ &= 1 - [1 - F_X(u)]^n \end{aligned}$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt blir:

$$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u) = n[1 - F_X(u)]^{n-1} f_X(u)$$

Eksempel: Seriesystem av komponenter med eksponensialfordelte levetider. Antar at $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uavh. eksponensialfordelte med forventning β. Dvs

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \quad , x \geq 0$$

som gir $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-u/\beta} du = 1 - e^{-x/\beta}$.
Dvs for levetiden til systemet, $U = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, får vi

$$\begin{aligned} F_U(u) &= 1 - [1 - F_X(u)]^n \\ &= 1 - [1 - (1 - e^{-u/\beta})]^n \\ &= 1 - [e^{-u/\beta}]^n = 1 - e^{-nu/\beta} \\ \Rightarrow \quad f_U(u) &= \frac{d}{du} F_U(u) = \frac{n}{\beta} e^{-nu/\beta} \end{aligned}$$

Dvs levetiden til systemet er eksponensialfordelt med forventning β/n. $\square$

Fordeling til $V = X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ (f.eks. parallellsystem):

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V \leq v) \\ &= P(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq v) \\ &= P((X_1 \leq v) \cap \ldots \cap (X_n \leq v)) \\ &\overset{uavh.}{=} P(X_1 \leq v) \cdots P(X_n \leq v) \\ &= [F_X(v)]^n \end{aligned}$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt blir:

$$f_V(v) = \frac{d}{dv} F_V(v) = n[F_X(v)]^{n-1} f_X(v)$$

Fordelingen til $X_{(k)}$: Les selv! Kan bl.a. brukes til å finne fordelingen til medianen.