Estimering 2
-Konfidensintervall

Dekkes av kap. 9.4-9.5, 9.10, 9.12 og forelesingsnotatene.

En (punkt-)estimator $\hat{\Theta}$ gir oss et anslag på en ukjent parameterverdi, men gir oss ikke noen direkte informasjon om usikkerheten i anslaget.

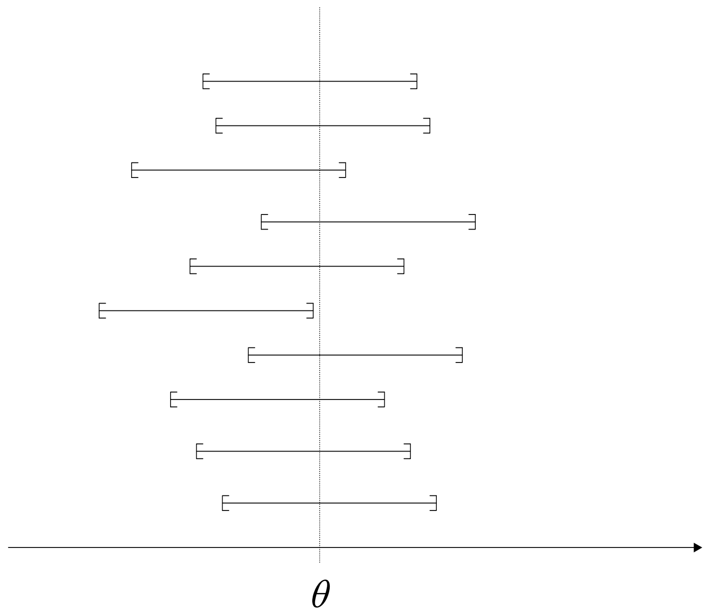
Et *konfidensintervall* er et intervall $[\hat{\Theta}_L, \hat{\Theta}_U]$ som med stor sannsynlighet vil komme til å inneholde den sanne parameterverdien θ.

Definisjon:

Intervallet $[\hat{\Theta}_L, \hat{\Theta}_U]$ er et $(1-\alpha)100\%$ konfidensintervall for θ dersom

$$P(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_U) = 1 - \alpha \quad \square$$

Dersom forsøket gjentas mange ganger vil $(1-\alpha)100\%$ av intervallene $[\hat{\Theta}_L, \hat{\Theta}_U]$ inneholde den ukjente parameteren θ (som er et fast men ukjent tall).



Eksempel: Bærebjelker. Bæreevnen (hvor stor belastning en bjelke tåler før den bryter sammen) til bærebjelker av en bestemt type antas normalfordelt med forventning μ og varians σ^2. Målinger av bæreevnen til 14 bjelker gav resultatene: 5.9, 6.1, 5.4, 5.9, 5.7, 6.5, 5.8, 6.0, 5.3, 6.3, 5.8, 5.8, 5.8 og 6.0. Basert på denne informasjonen ønsker vi å lage konfidensintervall for μ og σ^2. $\square$

Eksempel: Levetiden til en bestemt type kretskort antas eksponensialfordelt med forventning β. Vi har observert at levetiden for seks slike kort ble hhv 612, 1009, 95, 1303, 599, og 780. Basert på dette ønsker vi å lage konfidensintervall for β. $\square$

Fordelingen til noen estimatorer

For å kunne lage konfidensintervall, og senere for å gjøre hypotesetester, må vi kjenne fordelingen til de ulike estimatorene.

Fordelingen til $\bar{X}$

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ er en lineærkombinasjon av u.i.f. variable. Fordelingen til $\bar{X}$ vil avhenge av fordelingen til $X_1, \ldots, X_n$.

<u>$X_1, \ldots, X_n$ normalfordelte og σ kjent:</u>

Da vet vi at en lineærkombinasjon av uavh. normalfordelte variable er normalfordelt (f.saml. side 34), og vi får at

$$Z = \frac{\bar{X} - \mathrm{E}(\bar{X})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

$X_1, \ldots, X_n$ normalfordelte og σ ukjent:

Vi erstatter da σ^2 med estimatoren S^2, og får:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$$

Fordelingen er ikke lenger en normalfordeling, men en (student) t-fordeling. t-fordeling ligner $N(0,1)$ men har større varians. Se boka(8.7)/f.saml.(s. 27) for flere detaljer om t-fordelingen.

$X_1, \ldots, X_n$ ikke normalfordelte og n stor:

Da gir SGT oss at:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mathrm{E}(\bar{X})}{\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \approx N(0,1)$$

$X_1, \ldots, X_n$ ikke normalfordelte og n liten:

Avhenge av fordelingen til $X_1, \ldots, X_n$, må se på hver enkelt situasjon.

Fordelingen til S^2 (f.saml. s. 27)

Dersom $X_1, \ldots, X_n$ u.i.f. $N(\mu, \sigma^2)$ kan det vises at (se boka)

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Er S^2 forventningsrett?

Husk at dersom $V \sim \chi^2_\nu$ så er $E(V) = \nu$. Dette gir:

$$\mathrm{E}(S^2) = \frac{\sigma^2}{n-1} \mathrm{E}(\frac{n-1}{\sigma^2} S^2) = \frac{\sigma^2}{n-1}(n-1) = \sigma^2$$

Dvs S^2 er en forventingsrett estimator for σ^2 når $X_1, \ldots, X_n$ er normalfordelte.

Det kan også vises at S^2 er forventningsrett generelt.

Fordelingen til $\hat{\beta}$ i eksponensial-fordelingen.

Dersom $X_1, \ldots, X_n$ u.i.f. eksponensial med forventning β estimerer vi β ved $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Fordelingen til denne estimatoren finne vi ved først å se på fordelingen til $2X_i/\beta$. La $Y = 2X_i/\beta$. Med $X_i = \beta Y/2 = w(Y)$ og dermed $w'(Y) = \beta/2$ gir transformasjonsformelen:

$$\begin{aligned} g(y) &= f(w(y))|w\prime(y)| = \frac{1}{\beta} e^{-(\beta y/2)/\beta} \frac{\beta}{2} \\ &= \frac{1}{2} e^{-y/2} \end{aligned}$$

Setter vi $\nu = 2$ i sannsynlighetstettheten til χ^2-fordelingen ser vi at dette er en χ^2_2-fordeling. (Se også øving 4, oppg. 3.)

Vi har da videre at $\sum_{i=1}^{n}(2X_i/\beta)$ vil være χ^2_{2n}-fordelt (f.saml. s. 34/35), dvs:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2X_i}{\beta} = \frac{2n}{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{2n}{\beta} \hat{\beta} \sim \chi^2_{2n}$$

Konfidensintervall generelt

$X_1, \ldots, X_n$ u.i.f. $f(x;\theta)$.
Ønsker $(1-\alpha)100\%$ konf. int. for θ:

1. Finn estimator for θ: $\hat{\Theta}$.
2. Finn et uttrykk $W = h(\hat{\Theta}, \theta)$ som inneholder både θ og $\hat{\Theta}$, og som har en kjent fordeling.
3. Sett: $P(w_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\Theta}, \theta) \leq w_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$.
4. Løs ulikheten m.h.p. θ slik at man får $P(A \leq \theta \leq B) = 1 - \alpha$.
   Konfidensintervall: $[A, B]$

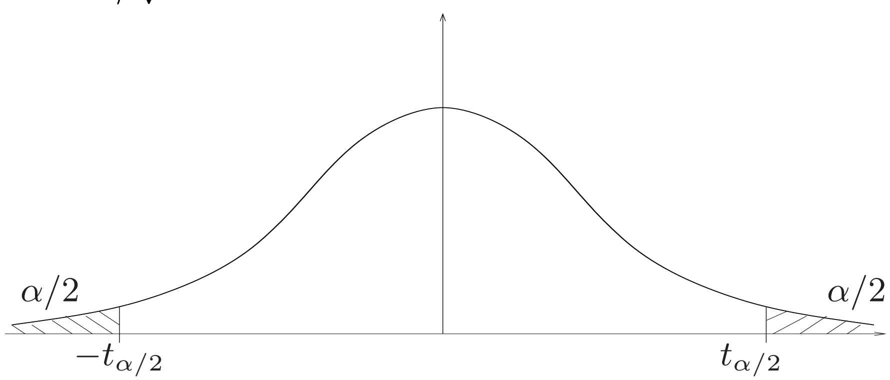
Punktene $w_{1-\alpha/2}$ og $w_{\alpha/2}$ kalles *kvantiler* og finnes i tabell.
Kvantil generelt: $P(W \geq w_a) = a$.

Eksempel: Bæreevne til bærebjelker. La X="bæreevne". $X_1, \ldots, X_n$ u.i.f. $N(\mu, \sigma^2)$.
Både μ og σ^2 er ukjente.

Konf. int. for μ:

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{siden } \sigma^2 \text{ ukjent (se side 4)}$$



$$\begin{aligned}
P(-t_{\alpha/2,n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2,n-1}) &= 1-\alpha \\
P(-t_{\alpha/2,n-1} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2,n-1}) &= 1-\alpha \\
&\vdots \\
P(\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

Dvs et $(1-\alpha)100\%$ konfidensintervall for μ (når σ^2 er ukjent) er gitt ved:

$$[\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \ , \ \ \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}]$$

Med de observerte dataene får vi $n = 14$, $\bar{x} = 5.8786$ og $s = \sqrt{0.0972} = 0.312$.

Dersom vi ønsker et 95% konf. int. setter vi $\alpha = 0.05$ som gir $t_{\alpha/2,n-1} = t_{0.025,13} = 2.160$, og 95% konf. int. for μ blir:

$$[5.8786 - 2.16 \cdot \tfrac{0.312}{\sqrt{14}} \ , \ \ 5.8786 + 2.16 \cdot \tfrac{0.312}{\sqrt{14}}]$$
$$= \underline{\underline{[5.70 \ , \ \ 6.06]}}$$

Konf. int. for σ^2:

Estimator: $$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Teorem 8.4/f.saml. s. 27 (se side 5) gir at:

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ P(\chi^2_{1-\alpha/2,n-1} \le (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\alpha/2,n-1}) &= 1-\alpha \\
P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}{(n-1)S^2} \le \frac{1}{\sigma^2} \le \frac{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}{(n-1)S^2}\right) &= 1-\alpha \\
P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

$(1-\alpha)100\%$ konf. int. for σ^2: $\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2,n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,n-1}}\right]$.

Med $n = 14$, $(n-1)s^2 = 13 \cdot 0.0972 = 1.2636$ og velger $\alpha = 0.05 \Rightarrow \chi^2_{0.025,13} = 24.736$ og $\chi^2_{0.975,13} = 5.009$, får vi 95% konf. int. for σ^2:

$$\left[\frac{1.2636}{24.736}, \frac{1.2636}{5.009}\right] = \underline{\underline{[0.051, 0.252]}} \quad \square$$

Eksempel: Levetid kretskort. Observerer $T_1, \ldots, T_n$ u.i.f. eksponensial med $E(T_i) = \beta$.

Konf. int. for β:

Estimator: $$\hat{\beta} = \bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$$

Har tidligere vist (se side 7):

$$\frac{2n}{\beta}\hat{\beta} \sim \chi^2_{2n}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ P(\chi^2_{1-\alpha/2,2n} \le \frac{2n}{\beta}\hat{\beta} \le \chi^2_{\alpha/2,2n}) &= 1-\alpha \\
P\left(\frac{\chi^2_{1-\alpha/2,2n}}{2n\hat{\beta}} \le \frac{1}{\beta} \le \frac{\chi^2_{\alpha/2,2n}}{2n\hat{\beta}}\right) &= 1-\alpha \\
P\left(\frac{2n\hat{\beta}}{\chi^2_{\alpha/2,2n}} \le \beta \le \frac{2n\hat{\beta}}{\chi^2_{1-\alpha/2,2n}}\right) &= 1-\alpha
\end{aligned}$$

Observerte data: $n = 6$, $\hat{\beta} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} t_i = 733$. Velger $\alpha = 0.10 \Rightarrow \chi^2_{0.05,12} = 21.026$ og $\chi^2_{0.95,12} = 5.226$. Gir 90% konf. int. for β:

$$\left[\frac{2\cdot 6\cdot 733}{21.026}, \frac{2\cdot 6\cdot 733}{5.226}\right] = \underline{\underline{[418, 1683]}} \quad \square$$

Eksempel: Antall ulykker per år på en oljeplattorm antas Poissonfordelt med forventning λ. De siste fem årene har det blitt registrert hhv 5, 8, 12, 7 og 13 ulykker. Vi ønsker ut fra dette å lage et konf. int. for λ.

Estimator: $$\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

der X_i er antall ulykker år i.

Fordeling til $\hat{\lambda}$?

Vi vet at dersom $X_1, \ldots, X_n$ uavh. Poisson med parameter λ så vil $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ være Poisson med parameter $n\lambda$ (f.saml. s. 34/35). Videre vet vi at dersom $n\lambda > 15$ så er Y tilnærmet normalfordelt (notatene til kap. 6). Dermed vil også $\hat{\lambda} = Y/n$ være tilnærmet normalfordelt (så sant $n\lambda > 15$, noe som er rimelig å anta i vårt tilfelle). Videre:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{\lambda}) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda = \lambda \\ \mathrm{Var}(\hat{\lambda}) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\lambda = \frac{\lambda}{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad Z = \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \approx N(0,1)$$

Dvs, vi finner konf. int. for λ ved å ta utgangspunkt i:

$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \leq z_{\alpha/2}) \approx 1 - \alpha$$

Triks: For å forenkle utregningen kan man erstatte λ i nevneren med $\hat{\lambda}$. Har fremdeles

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}/n}} \approx N(0,1)$$

og får nå:

$$\begin{aligned} P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}/n}} \leq z_{\alpha/2}) &\approx 1 - \alpha \\ &\vdots \\ P(\hat{\lambda} - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\lambda}/n} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\lambda}/n}) &\approx 1 - \alpha \end{aligned}$$

Dvs tilnærmet $(1-\alpha)100\%$ konf. int. for λ blir:

$$\left[\hat{\lambda} - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\lambda}/n}\ ,\ \ \hat{\lambda} + z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\lambda}/n}\right]$$

Med våre data blir $n = 5$ og $\hat{\lambda} = \frac{1}{5}(5 + 8 + 12 + 7 + 13) = 9$. Velger vi $\alpha = 0.05$ blir $z_{0.025} = 1.96$ slik at et tilnærmet 95% konf. int. for λ blir:

$$[9 - 1.96\sqrt{9/5}\ ,\ \ 9 + 1.96\sqrt{9/5}] = \underline{\underline{[6.4, 11.6]}}$$

(Uten å bruke forenklingen $\lambda \approx \hat{\lambda}$ i nevneren blir intervallet: [6.7,12.0]) $\square$

Til slutt

Husk at et f.eks. 95% konf. int. $[\hat{\Theta}_L, \hat{\Theta}_U]$ er laget slik at $P(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_U) = 0.95$.
Det betyr at dersom vi lager mange intervall vil 95% av dem inneholde den sanne parameterverdien θ (se side 2/figur 9.3 i boka).

Dersom vi f.eks. får det observerte intervallet $[3.2, 5.6]$ vet vi ikke om θ er inneholdt i intervallet eller ikke, men ut fra måten vi har laget intervallet på har vi stor <u>tiltro</u> (=konfidens) til at den er innehold i intervallet.

NB! Vi kan <u>ikke</u> si at det er 95% sannsynlighet for at det observerte intervallet $[3.2, 5.6]$ inneholder θ (eller for at θ er inneholdt i intervallet). Vi kan kun snakke om stor tiltro (konfidens) når vi har et observert intervall/tallsvar.