

Estimering 2

-Konfidensintervall

Dekkes av kap. 9.4-9.5, 9.10, 9.12 og forelesingsnotatene.

En (punkt-)estimator $\hat{\Theta}$ gir oss et anslag på en ukjent parameterverdi, men gir oss ikke noen direkte informasjon om usikkerheten i anslaget.

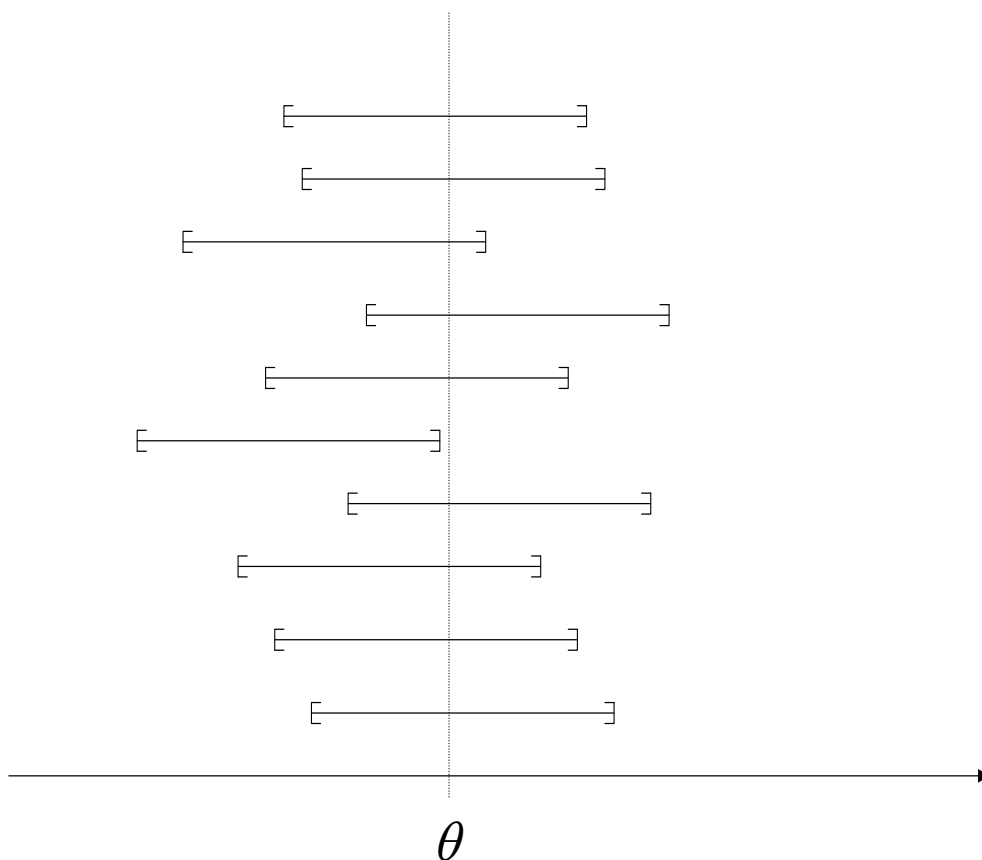
Et *konfidensintervall* er et intervall $[\hat{\Theta}_L, \hat{\Theta}_U]$ som med stor sannsynlighet vil komme til å inneholde den sanne parameterverdien θ .

Definisjon:

Intervall $[\hat{\Theta}_L, \hat{\Theta}_U]$ er et $(1 - \alpha)100\%$ konfidensintervall for θ dersom

$$P(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_U) = 1 - \alpha \quad \square$$

Dersom forsøket gjentas mange ganger vil $(1 - \alpha)100\%$ av intervallene $[\hat{\Theta}_L, \hat{\Theta}_U]$ inneholde den ukjente parameteren θ (som er et fast men ukjent tall).



Eksempel: Bærebjelker. Bæreevnen (hvor stor belastning en bjelke tåler før den bryter sammen) til bærebjelker av en bestemt type antas normalfordelt med forventning μ og varians σ^2 . Målinger av bæreevnen til 14 bjelker gav resultatene: 5.9, 6.1, 5.4, 5.9, 5.7, 6.5, 5.8, 6.0, 5.3, 6.3, 5.8, 5.8, 5.8 og 6.0. Basert på denne informasjonen ønsker vi å lage konfidensintervall for μ og σ^2 . $\square$

Eksempel: Levetiden til en bestemt type krets-kort antas eksponensialfordelt med forventning β . Vi har observert at levetiden for seks slike kort ble hhv 612, 1009, 95, 1303, 599, og 780. Basert på dette ønsker vi å lage konfidensintervall for β . $\square$

Fordelingen til noen estimatorer

For å kunne lage konfidensintervall, og senere for å gjøre hypotesetester, må vi kjenne fordelingen til de ulike estimatorene.

Fordelingen til $\bar{X}$

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ er en lineærkombinasjon av u.i.f. variable. Fordelingen til $\bar{X}$ vil avhenge av fordelingen til $X_1, \dots, X_n$.

$X_1, \dots, X_n$ normalfordelte og σ kjent:

Da vet vi at en lineærkombinasjon av uavh. normalfordelte variable er normalfordelt (f.saml. side 34), og vi får at

$$Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

$X_1, \dots, X_n$ normalfordelte og σ ukjent:

Vi erstatter da σ^2 med estimatoren S^2 , og får:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{S^2/n}} \sim t_{n-1}$$

Fordelingen er ikke lenger en normalfordeling, men en (student) t -fordeling. t -fordeling ligner $N(0, 1)$ men har større varians. Se boka(8.7)/f.saml.(s. 27) for flere detaljer om t -fordelingen.

$X_1, \dots, X_n$ ikke normalfordelte og n stor:

Da gir SGT oss at:

$$Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{\text{Var}(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \approx N(0, 1)$$

$X_1, \dots, X_n$ ikke normalfordelte og n liten:

Avhenge av fordelingen til $X_1, \dots, X_n$, må se på hver enkelt situasjon.

Fordelingen til S^2 (f.saml. s. 27)

Dersom $X_1, \dots, X_n$ u.i.f. $N(\mu, \sigma^2)$ kan det vises at (se boka)

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

Er S^2 forventningsrett?

Husk at dersom $V \sim \chi_\nu^2$ så er $E(V) = \nu$. Dette gir:

$$E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n-1} E\left(\frac{n-1}{\sigma^2} S^2\right) = \frac{\sigma^2}{n-1} (n-1) = \sigma^2$$

Dvs S^2 er en forventningsrett estimator for σ^2 når $X_1, \dots, X_n$ er normalfordelte.

Det kan også vises at S^2 er forventningsrett generelt.

Fordelingen til $\hat{\beta}$ i eksponensialfordelingen.

Dersom $X_1, \dots, X_n$ u.i.f. eksponensial med forventning β estimerer vi β ved $\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Fordelingen til denne estimatoren finne vi ved først å se på fordelingen til $2X_i/\beta$. La $Y = 2X_i/\beta$. Med $X_i = \beta Y/2 = w(Y)$ og dermed $w'(Y) = \beta/2$ gir transformasjonsformelen:

$$\begin{aligned} g(y) &= f(w(y))|w'(y)| = \frac{1}{\beta} e^{-(\beta y/2)/\beta} \frac{\beta}{2} \\ &= \frac{1}{2} e^{-y/2} \end{aligned}$$

Setter vi $\nu = 2$ i sannsynlighetstettheten til χ^2 -fordelingen ser vi at dette er en χ^2_2 -fordeling. (Se også øving 4, oppg. 3.)

Vi har da videre at $\sum_{i=1}^n (2X_i/\beta)$ vil være χ^2_{2n} -fordelt (f.saml. s. 34/35), dvs:

$$\sum_{i=1}^n \frac{2X_i}{\beta} = \frac{2n}{\beta} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{2n}{\beta} \hat{\beta} \sim \chi^2_{2n}$$

Konfidensintervall generelt

$X_1, \dots, X_n$ u.i.f. $f(x; \theta)$.

Ønsker $(1 - \alpha)100\%$ konf. int. for θ :

1. Finn estimator for θ : $\hat{\Theta}$.
2. Finn et uttrykk $W = h(\hat{\Theta}, \theta)$ som inneholder både θ og $\hat{\Theta}$, og som har en kjent fordeling.
3. Sett: $P(w_{1-\alpha/2} \leq h(\hat{\Theta}, \theta) \leq w_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$.
4. Løs ulikheten m.h.p. θ slik at man får $P(A \leq \theta \leq B) = 1 - \alpha$.
Konfidensintervall: $[A, B]$

Punktene $w_{1-\alpha/2}$ og $w_{\alpha/2}$ kalles *kvantiler* og finnes i tabell.

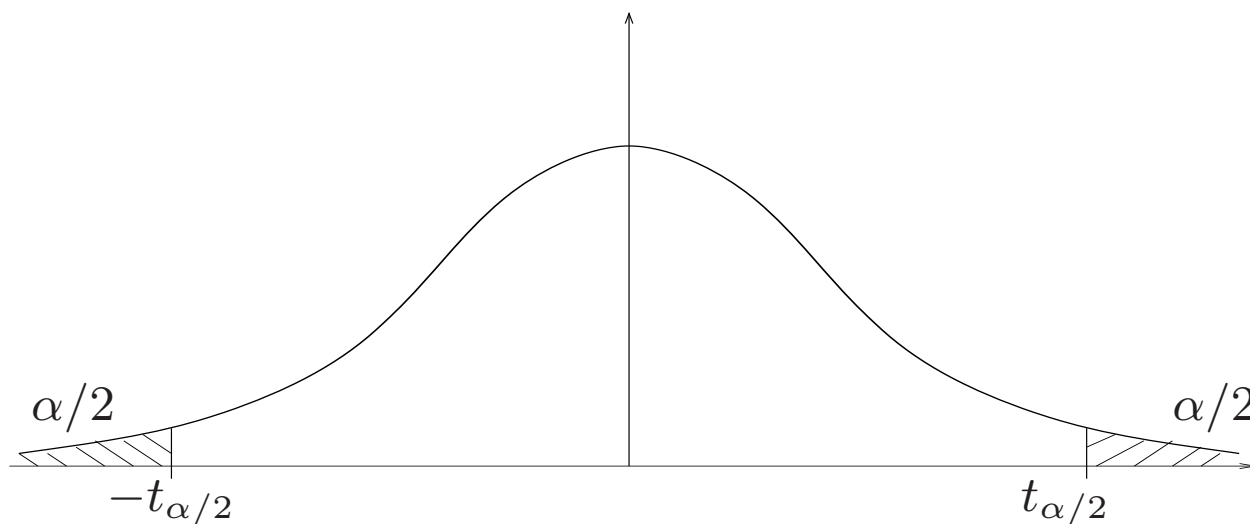
Kvantil generelt: $P(W \geq w_a) = a$.

Eksempel: Bæreevne til bærebjelker. La X ="bæreevne". $X_1, \dots, X_n$ u.i.f. $N(\mu, \sigma^2)$. Både μ og σ^2 er ukjente.

Konf. int. for μ :

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{siden } \sigma^2 \text{ ukjent (se side 4)}$$



$$P(-t_{\alpha/2, n-1} \leq T \leq t_{\alpha/2, n-1}) = 1 - \alpha$$

$$P(-t_{\alpha/2, n-1} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2, n-1}) = 1 - \alpha$$

$\vdots$

$$P(\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Dvs et $(1 - \alpha)100\%$ konfidensintervall for μ (når σ^2 er ukjent) er gitt ved:

$$[\bar{X} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}} , \quad \bar{X} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}]$$

Med de observerte dataene får vi $n = 14$,
 $\bar{x} = 5.8786$ og $s = \sqrt{0.0972} = 0.312$.

Dersom vi ønsker et 95% konf. int. setter vi $\alpha = 0.05$ som gir $t_{\alpha/2, n-1} = t_{0.025, 13} = 2.160$,
og 95% konf. int. for μ blir:

$$\begin{aligned} & [5.8786 - 2.16 \cdot \frac{0.312}{\sqrt{14}} , \quad 5.8786 + 2.16 \cdot \frac{0.312}{\sqrt{14}}] \\ & = \underline{\underline{[5.70 , \quad 6.06]}} \end{aligned}$$

Konf. int. for σ^2 :

Estimator:
$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Teorem 8.4/f.saml. s. 27 (se side 5) gir at:

$$(n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$\Rightarrow P(\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2 \leq (n-1) \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi_{\alpha/2, n-1}^2) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}{(n-1)S^2} \leq \frac{1}{\sigma^2} \leq \frac{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}{(n-1)S^2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2}\right) = 1 - \alpha$$

$$(1-\alpha)100\% \text{ konf. int. for } \sigma^2: \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2, n-1}^2}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2, n-1}^2} \right].$$

Med $n = 14$, $(n-1)s^2 = 13 \cdot 0.0972 = 1.2636$

og velger $\alpha = 0.05 \Rightarrow \chi_{0.025, 13}^2 = 24.736$ og

$\chi_{0.975, 13}^2 = 5.009$, får vi 95% konf. int. for σ^2 :

$$\left[\frac{1.2636}{24.736}, \frac{1.2636}{5.009} \right] = \underline{\underline{[0.051, 0.252]}} \quad \square$$

Eksempel: Levetid kretskort. Observerer $T_1, \dots, T_n$ u.i.f. eksponensial med $E(T_i) = \beta$.
Konf. int. for β :

Estimator:
$$\hat{\beta} = \bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$$

Har tidligere vist (se side 7):

$$\frac{2n}{\beta} \hat{\beta} \sim \chi_{2n}^2$$

$$\Rightarrow P(\chi_{1-\alpha/2, 2n}^2 \leq \frac{2n}{\beta} \hat{\beta} \leq \chi_{\alpha/2, 2n}^2) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\chi_{1-\alpha/2, 2n}^2}{2n\hat{\beta}} \leq \frac{1}{\beta} \leq \frac{\chi_{\alpha/2, 2n}^2}{2n\hat{\beta}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{2n\hat{\beta}}{\chi_{\alpha/2, 2n}^2} \leq \beta \leq \frac{2n\hat{\beta}}{\chi_{1-\alpha/2, 2n}^2}\right) = 1 - \alpha$$

Observerte data: $n = 6$, $\hat{\beta} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 t_i = 733$.

Velger $\alpha = 0.10 \Rightarrow \chi_{0.05, 12}^2 = 21.026$ og

$\chi_{0.95, 12}^2 = 5.226$. Gir 90% konf. int. for β :

$$\left[\frac{2 \cdot 6 \cdot 733}{21.026}, \frac{2 \cdot 6 \cdot 733}{5.226} \right] = \underline{\underline{[418, 1683]}} \quad \square$$

Eksempel: Antall ulykker per år på en oljeplattform antas Poissonfordelt med forventning λ . De siste fem årene har det blitt registrert hhv 5, 8, 12, 7 og 13 ulykker. Vi ønsker ut fra dette å lage et konf. int. for λ .

Estimator:
$$\hat{\lambda} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

der X_i er antall ulykker år i .

Fordeling til $\hat{\lambda}$?

Vi vet at dersom $X_1, \dots, X_n$ uavh. Poisson med parameter λ så vil $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ være Poisson med parameter $n\lambda$ (f.saml. s. 34/35). Videre vet vi at dersom $n\lambda > 15$ så er Y tilnærmet normalfordelt (notatene til kap. 6). Dermed vil også $\hat{\lambda} = Y/n$ være tilnærmet normalfordelt (så sant $n\lambda > 15$, noe som er rimelig å anta i vårt tilfelle). Videre:

$$\begin{aligned} E(\hat{\lambda}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda = \lambda \\ \text{Var}(\hat{\lambda}) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \lambda = \frac{\lambda}{n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \approx N(0, 1)$$

Dvs, vi finner konf. int. for λ ved å ta utgangspunkt i:

$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda/n}} \leq z_{\alpha/2}) \approx 1 - \alpha$$

Triks: For å forenkle utregningen kan man erstatte λ i nevneren med $\hat{\lambda}$. Har fremdeles

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}/n}} \approx N(0, 1)$$

og får nå:

$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\hat{\lambda}/n}} \leq z_{\alpha/2}) \approx 1 - \alpha$$

⋮

$$P(\hat{\lambda} - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\lambda}/n} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\lambda}/n}) \approx 1 - \alpha$$

Dvs tilnærmet $(1 - \alpha)100\%$ konf. int. for λ blir:

$$\left[\hat{\lambda} - z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\lambda}/n}, \quad \hat{\lambda} + z_{\alpha/2} \sqrt{\hat{\lambda}/n} \right]$$

Med våre data blir $n = 5$ og $\hat{\lambda} = \frac{1}{5}(5 + 8 + 12 + 7 + 13) = 9$. Velger vi $\alpha = 0.05$ blir $z_{0.025} = 1.96$ slik at et tilnærmet 95% konf. int. for λ blir:

$$[9 - 1.96\sqrt{9/5}, \quad 9 + 1.96\sqrt{9/5}] = \underline{\underline{[6.4, 11.6]}}$$

(Uten å bruke forenklingen $\lambda \approx \hat{\lambda}$ i nevneren blir intervallet: $[6.7, 12.0]$) □

Til slutt

Husk at et f.eks. 95% konf. int. $[\hat{\Theta}_L, \hat{\Theta}_U]$ er laget slik at $P(\hat{\Theta}_L < \theta < \hat{\Theta}_U) = 0.95$.

Det betyr at dersom vi lager mange intervall vil 95% av dem inneholde den sanne parameterverdien θ (se side 2/figur 9.3 i boka).

Dersom vi f.eks. får det observerte intervallet $[3.2, 5.6]$ vet vi ikke om θ er inneholdt i intervallet eller ikke, men ut fra måten vi har laget intervallet på har vi stor tiltro (=konfidens) til at den er inneholdt i intervallet.

NB! Vi kan ikke si at det er 95% sannsynlighet for at det observerte intervallet $[3.2, 5.6]$ inneholder θ (eller for at θ er inneholdt i intervallet). Vi kan kun snakke om stor tiltro (konfidens) når vi har et observert intervall/tall svar.