

Ordningsvariable og ekstremvariable

(Notat forfattet av Stian Lydersen, NTNU, og Jan Terje Kvaløy, UiS)

Fordelingen til ordningsvariable

La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige, identisk fordelte stokastiske variable med kumulativ fordelingsfunksjon $F_X(x) = P(X \leq x)$. Vi ordner X_i -ene etter størrelse og betegner dem $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$, hvor $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Dette kalles ordningsvariable. Spesielt er

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ X_{(n)} &= \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{aligned}$$

og disse kalles ekstremvariable. Medianen er definert ved:

$$\tilde{X} = \begin{cases} X_{((n+1)/2)} & \text{hvis } n \text{ er oddetall} \\ \frac{1}{2}(X_{(n/2)} + X_{(n/2+1)}) & \text{hvis } n \text{ er partall} \end{cases}$$

Variasjonsbredden ("range" på engelsk) er definert ved: $X_{(n)} - X_{(1)}$.

Fordelingen til $V = X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ kan finnes ved å benytte at den største av X_i -ene er mindre enn eller lik v hvis og bare hvis alle X_i -ene er mindre enn eller lik v :

$$\begin{aligned} F_V(v) = P(V \leq v) &= P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq v) \\ &= P((X_1 \leq v) \cap (X_2 \leq v) \cap \dots \cap (X_n \leq v)) \\ &\stackrel{\text{uavh.}}{=} P(X_1 \leq v) \cdot P(X_2 \leq v) \cdots P(X_n \leq v) \\ &= [F_X(v)]^n \end{aligned}$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt blir:

$$f_V(v) = \frac{d}{dv} F_V(v) = n[F_X(v)]^{n-1} f_X(v)$$

Fordelingen til $U = X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ blir på tilsvarende måte:

$$\begin{aligned} F_U(u) = P(U \leq u) &= P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq u) \\ &= 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > u) \\ &= 1 - P((X_1 > u) \cap (X_2 > u) \cap \dots \cap (X_n > u)) \\ &\stackrel{\text{uavh.}}{=} 1 - P(X_1 > u) \cdot P(X_2 > u) \cdots P(X_n > u) \\ &= 1 - [1 - F_X(u)]^n \end{aligned}$$

Hvis X er kontinuertlig fordelt blir:

$$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u) = n[1 - F_X(u)]^{n-1} f_X(u)$$

Fordelingen til $X_{(k)}$ blir

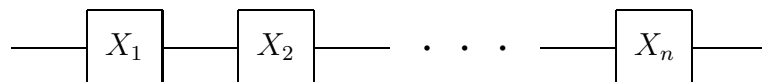
$$F_{X_{(k)}}(x) = P(k \text{ eller flere } X_i\text{-er er } \leq x) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} [F_X(x)]^j [1 - F_X(x)]^{n-j}$$

fordi antallet $X_i \leq x$ er binomisk fordelt med parametre n og $p = P(X_i \leq x) = F_X(x)$. Sannsynlighetstettheten finnes ved å derivere m.h.p. x og etter noe mellomregning kan den skrives:

$$f_{X_{(k)}}(x) = n \binom{n-1}{k-1} [F_X(x)]^{k-1} [1 - F_X(x)]^{n-k} f_X(x)$$

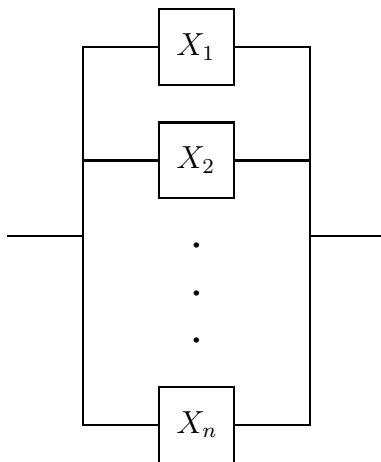
Eksempel: Seriesystem og parallellsystem

La oss se på levetiden til et system sammensatt av komponenter med uavhengige levetider. I første omgang ser vi på et system som funksjonerer hvis og bare hvis samtlige komponenter funksjonerer. Dette kan illustreres ved en seriekopling:



La X_i være levetiden til komponent nr i . Systemet funksjonerer frem til første komponent svikter. Da er levetiden til systemet $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

I systemer eller delsystemer der det stilles høye krav til at systemet skal funksjonere koples ofte komponenter i parallell:



Systemet funksjonerer så lenge minst en av komponentene funksjonerer. Levetiden til systemet blir $V = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Seriesystem: La $X_1, X_2, \dots, X_n$ være uavhengige, eksponensialfordelte levetider med parameter λ slik at $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ for $x \geq 0$, $\lambda > 0$. Fordelingen til $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ blir:

$$\begin{aligned}
 F_U(u) = P(U \leq u) &= P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq u) \\
 &= 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > u) \\
 &= 1 - P((X_1 > u) \cap (X_2 > u) \cap \dots \cap (X_n > u)) \\
 &\stackrel{uavh.}{=} 1 - P(X_1 > u) \cdot P(X_2 > u) \cdots P(X_n > u) \\
 &= 1 - [1 - F_X(u)]^n \\
 &= 1 - [1 - \int_0^u f_X(x) dx]^n \\
 &= 1 - [1 - \int_0^u \lambda e^{-\lambda x} dx]^n \\
 &= 1 - [1 - (1 - e^{-\lambda u})]^n \\
 &= 1 - e^{-n\lambda u} \quad \text{for } u > 0
 \end{aligned}$$

Altså er levetiden til seriesystemet eksponensialfordelt med parameter $n\lambda$. Forventet levetid blir da $E(U) = \frac{1}{n\lambda}$.

Oppgaver

Oppgave 1. Betrakt et parallellsystem bestående av 2 uavhengige komponenter. Levetiden til hver komponent er eksponensialfordelt med parameter λ , dvs

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

La V være levetiden til systemet. Finn fordelingen til V , samt $E(V)$.

Oppgave 2. Betrakt et seriesystem sammensatt av n uavhengige komponenter. Levetiden til hver komponent følger en fordeling med kumulativ fordelingsfunksjonen

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x^\beta} & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor $\alpha > 0$ og $\beta > 0$. Dette er en Weibull-fordeling med parametre $\alpha > 0$ og $\beta > 0$.

Finn den kumulative fordelingsfunksjonen for levetiden til systemet. Hva kalles denne sannsynlighetsfordelingen?

Regn ut forventet levetid for en komponent og forventet levetid for hele systemet når $\alpha = 0.1$ og $\beta = 0.5$.