Litt mer om eksponensialfordelingen og Poisson-prosesser.

Dekkes av 5.6, 6.6, 6.7 og det som står under.

Eksponensialfordelingen

Så langt har vi lært at det finnes to parametriseringer av eksponensialfordelingen som brukes om hverandre. Enten brukes

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \;, \quad x \geq 0,$$

som gir $\mathrm{E}(X) = \beta$ og $\mathrm{Var}(X) = \beta^2$, eller

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \;, \quad x \geq 0,$$

som gir $\mathrm{E}(X) = 1/\lambda$ og $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$. Dvs sammenhengen er $\beta = 1/\lambda$.

Videre har vi lært har at dersom $X_1, \ldots, X_k$ er uavh. eksponensialfordelte med forventning β så er $U = \min(X_1, \ldots, X_k)$ eksponensialfordelt med forventning β/k. (Mens max av eksponensialfordelte ikke er eksponensialfordelt!)

Vi har også nevnt at en sum av uavhengige identisk eksponensialfordelte variable er gammafordelt. Dersom $X_1, \ldots, X_k$ uavh. eksponensialfordelte med forventning β er $Y = \sum_{i=1}^{k} X_i$ gammafordelt med parametre $\alpha = k$ og β.

Nå skal vi se at eksponensialfordelingen er *hukommelsesløs*!

Eksempel: Du har kjøpt en lyspære som du så langt har brukt i 300 timer og den fungerer fremdeles. Hva er sannsynligheten for at den vil fungere i 500 timer til? La T være levetiden til lyspæren og anta at T er eksponensialfordelt med forventning β. Vi har da

$$P(T > t) = \int_t^\infty \frac{1}{\beta} e^{-u/\beta} du = [-e^{-u/\beta}]_t^\infty = e^{-t/\beta}.$$

Vi skal finne $P(T > 500 + 300 | T > 300) = P(T > 800 | T > 300)$:

$$
\begin{aligned}
P(T > 800 | T > 300) &= \frac{P((T > 800) \cap (T > 300))}{P(T > 300)} \\
&= \frac{P(T > 800)}{P(T > 300)} \\
&= \frac{e^{-800/\beta}}{e^{-300/\beta}} \\
&= e^{-500/\beta} = P(T > 500)
\end{aligned}
$$

Dvs sannsynligheten for at ei lyspære som vi ser at fungerer etter 300 timer skal fungere i 500 timer til er like stor som sannsynligheten for at ei ny pære skal fungere i 500 timer!! (dersom levetiden er eksponensialfordelt) $\square$

Generelt har vi for eksponensialfordelingen at:

$$
\begin{aligned}
P(T > s + u | T > u) &= \frac{P((T > s + u) \cap (T > u))}{P(T > u)} \\
&= \frac{P(T > s + u))}{P(T > u)} \\
&= \frac{e^{-(s+u)/\beta}}{e^{-u/\beta}} \\
&= e^{-s/\beta} = P(T > s)
\end{aligned}
$$

Denne egenskapen kaller vi at eksponensialfordelingen er *hukommelsesløs*.

Dersom T er en funksjonstid kan vi tenke på dette som at systemet/komponenten med eksponensialfordelt levetid verken forbedres eller forverres over tid. Dvs eksponensialfordeling er best egnet som modell for fenomen hvor feil/hendelser skjer "spontant" (ikke aldring, gradvis utmatting, "barnesykdommer", e.l.).

Det kan vises at eksponensialfordelingen er den eneste kontinuerlige fordeling som er hukommelsesløs. Blant de diskrete fordelingene er geometrisk fordeling hukommelsesløs.

Kort oppsummert:

- Eksponensialfordelingen er hukommelsesløs.
- Minimum av k uavh. eksponensialfordelte variable med forventning β er eksponensialfordelt med forventning β/k.
- Sum av k uavh. eksponensialfordelte variable med forventning β er gammafordelt med $\alpha = k$ og $\beta = \beta$.

Poisson-prosesser

Vi har sett tidligere at forekomsten av hendelser følger en *Poisson-prosess* dersom:

1. Antallene hendelser i ikke-overlappende intervaller er uavhengige.

2. For ethvert lite intervall $[s, s + \Delta s]$ er $P(\text{en hendelse i } [s, s + \Delta s]) \approx \lambda \Delta s$.

3. $P(\text{to eller flere hendelser i } [s, s + \Delta s]) \approx 0$.

Det kan da vises at $X =$"antall hendelser i $[0, t]$" er Poisson-fordelt med forventningsverdi $\mu = \lambda t$. Dvs

$$f(x) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} \ , \quad x = 0, 1, 2, \ldots .$$

Tilsvarende vil også $X =$"antall hendelser i $[a, b]$" være Poisson-fordelt med forventningsverdi $\mu = \lambda(b - a)$

Parameteren λ kalles *intensiteten* til prosessen.

Vi har tidligere vist at tid til første hendelse i en Poisson-prosess er eksponensialfordelt med forventning $1/\lambda$:

$$\begin{aligned} P(T_1 > t) &= P(\text{ingen hendelser i } [0,t]) \\ &= \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Videre er også alle tider *mellom* hendelser eksponensialfordelte.

Siden eksponensialfordelingen er hukommelsesløs får vi at Poisson-prosesser også vil være hukommelsesløse. Dette har vi allerede vist i busseksemplet i notatene til kap. 6. Uansett når vi går inn i en Poisson-prosess er fordelingen til tid til neste hendelse eksponensial med forventning $1/\lambda$, uavhengig av hva som har skjedd tidligere.

At prosessen er hukommelsesløs følger direkte fra punkt 1 og 2 i definisjonen. Sannsynligheten for en hendelse i $[s, s + \Delta s]$ er den samme for alle s (punkt 2) og uavh. av hva som har skjedd tidligere (punkt 1).

Det kan vises at en sum av k uavh. identisk eksponensialfordelte variable med forventning β er gammafordelt med $\alpha = k$ og $\beta = \beta$. Fra dette følger det direkte at tid til $k$te hendelse i en Poisson-prosess vil være gammafordelt med $\alpha = k$ og $\beta = 1/\lambda$ (siden tider mellom hendelser er eksponensialfordelte).

Kort oppsummert:

- Antall hendelser i $[a, b]$ er Poisson-fordelt med parameter $\lambda(b - a)$.
- Tid til første hendelse, og tid mellom to hendelser i en Poisson-prossess er eksponensialfordelt med forventning $1/\lambda$.
- Tid fra et vilkårlig tidspunkt i en Poisson-prossess til neste hendelse er eksponensialfordelt med forventning $1/\lambda$ (prosessen er hukommelsesløs).
- Tid til $k$te hendelse i en Poisson-prossess er gammafordelt med $\alpha = k$ og $\beta = 1/\lambda$.