

Eksempel: Levetid kretskort. Levetiden antas eksponensialfordelt med forventning β . Ønsker å teste om målet $\beta > 700$ ser ut til å være oppfylt.

$$H_0 : \beta = 700 \quad \text{mot} \quad H_1 : \beta > 700$$

$$\text{Estimator: } \hat{\beta} = \bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$$

Fra tidligere (se notatene om estimering) får vi:

$$\frac{2n}{\beta_0} \hat{\beta} \sim \chi^2_{2n} \quad \text{under } H_0$$

Vi forkaster H_0 dersom $\frac{2n}{\beta_0} \hat{\beta} \geq \chi^2_{\alpha, 2n}$.

Med $\alpha = 0.05$ og $n = 6$ blir $\chi^2_{\alpha, 2n} = \chi^2_{0.05, 12} = 21.026$

Observert: $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \frac{1}{T_i}$

$$\frac{2n}{\beta_0} \hat{\beta} = \frac{12}{700} \cdot 733 = 12.57 < \chi^2_{0.05, 12} = 21.026$$

dvs vi forkaster ikke H_0 på 5% nivå. Dataene gir ikke grunnlag for å hevde at $\beta > 700$. $\square$

Dvs vi ant ikke om $\beta \leq 700$ eller $\beta > 700$.

Eksempel: I en produksjonsprosess har det tidligere blitt produsert 18% B-varer. Etter en omlegging av rutinene lurer man på om andelen B-varer har endret seg. Blant 75 varer produsert etter omleggingen blir 17 klassifisert som B-varer. Tyder dette på at andelen B-varer har endret seg?

Merk først: $X =$ "antall B-varer blant n tilfeldig valgte varer" vil være $B(n, p)$ -fordelt, der p er sannsynligheten for at en tilfeldig vare er B-vare (=andel B-varer).

$$H_0 : p = 0.18 \quad \text{mot} \quad H_1 : p \neq 0.18$$

$$\text{Estimator: } \hat{p} = \frac{X}{n}$$

Fordeling til $\hat{p}$?

Fra kap. 6 har vi at når $X \sim B(n, p)$ og $np > 5$ og $n(1 - p) > 5$ så er $X \approx N(np, np(1 - p))$. Dette er oppfylt her, og når X er tilnærmet normalfordelt vil også $\hat{p} = \frac{X}{n}$ være tilnærmet normalfordelt.

$$Z = \frac{\hat{p} - E(\hat{p})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{p})}} \approx N(0,1)$$

Husk:
 $N \hat{X} \sim B(n, p)$
 $E(\hat{X}) = np$
 $\text{Var}(\hat{X}) = np(1-p)$

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X) = \frac{1}{n}np = p$$

$$\text{Var}(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X) = \frac{1}{n^2} np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \approx N(0,1) \text{ under } H_0$$

Vi forkaster H_0 dersom $Z \leq -z_{\alpha/2}$ eller $Z \geq z_{\alpha/2}$.

Velger vi $\alpha = 0.05$ får vi $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$

Observerte data gir $\hat{p} = 17/75 = 0.227$ og -1.96 dermed:

$$z = \frac{0.227 - 0.18}{\sqrt{0.18(1-0.18)/75}} = 1.06$$

dvs vi forkaster ikke H_0 på 5% nivå. Dataene gir ikke grunnlag for å hevde at $p \neq 0.18$. $\square$

Sammenheng mellom (tosidig) hypotesetesting og konfidensintervall: Les selv i boka, kap. 10.6!

Eksempel $X_1, \dots, X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$

Ulykken på oljeplattformen var en

$$H_0: \lambda = 8, \quad H_1: \lambda > 8$$

$$1) \hat{\lambda} = \bar{X} \quad \text{Poisson}(\lambda)$$

$$2) \hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Poisson}(n\lambda) \text{ og}$$

dersom $n\lambda > 15 \approx \text{Normalfordelt}$

Dvs $\sum_{i=1}^n X_i \approx \text{Normalfordelt}$ når $n\lambda > 15$ og dermed er også $\hat{\lambda}$ tilnærmet normalfordelt

$$\Rightarrow Z = \frac{\hat{\lambda} - E(\hat{\lambda})}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\lambda})}} = \frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0/n}} \approx N(0,1) \text{ under } H_0$$



3) Forkaster H_0 dersom $Z \geq z_{\alpha}$

$$\alpha = 0.10, \quad z_{0.10} = 1.28$$

Data: 5, 8, 12, 7 og 13 ulykker per år

$$\text{Så } \hat{\lambda} = \bar{X} = 9$$

$$\Rightarrow Z = \frac{9-8}{\sqrt{8/5}} = 0.79$$

$\Rightarrow$ Forkaster ikke H_0 !

Ulykke grunnlag for å gjette at $\lambda > 8$.