

Eksempel: Bølgelængde

$$f_X(x) = \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta}, \quad x > 0$$

Observeret $X_1, \dots, X_n$. $SME: \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

Har vi: $E(\hat{\theta}) = \theta$, $Var(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{n}$

Ønsker vi konf. int.

Fordeling for $\hat{\theta}$? $h(\hat{\theta}, \theta)$?

Kan vi f. eks. finde en transformation til Y ?

$$\text{Så på } Y = \frac{2}{\theta} X^2 \Rightarrow Y = \left(\frac{\theta}{2} Y\right)^{1/2} = w(Y)$$

$$w'(Y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} Y\right)^{-1/2} \cdot \frac{\theta}{2}$$

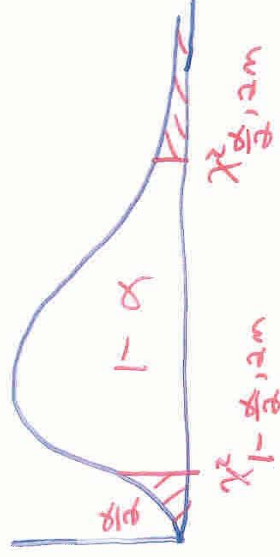
Transformationsformelen gir da:

$$f_Y(y) = f_X(w(y)) |w'(y)| = \frac{2}{\theta} \left(\frac{\theta}{2} y\right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{\theta}{2} y / \theta} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2} y\right)^{-1/2} \cdot \frac{\theta}{2} \\ = \frac{1}{2} e^{-y/2}$$

Dette er en χ^2_2 -fordeling (sett $2 = 2$ i $f(x)$)

Har da at:

$$\sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \frac{2}{\theta} X_i^2 = \frac{2n}{\theta} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{2n\hat{\theta}}{\theta} \sim \chi^2_{2n}$$



$$P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, 2n} \leq \frac{2n\hat{\theta}}{\theta} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2}, 2n}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, 2n}}{2n\hat{\theta}} \leq \frac{1}{\theta} \leq \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, 2n}}{2n\hat{\theta}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{2n\hat{\theta}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, 2n}} \leq \theta \leq \frac{2n\hat{\theta}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, 2n}}\right) = 1 - \alpha$$

Med $n=50$ og $\sum_{i=1}^{50} Y_i^2 = 109.6$ får vi:

$$\hat{\theta} = \frac{109.6}{50} = 2.2 \text{ og } 95\% \text{ konf. int.:}$$

$$\left[\frac{2 \cdot 50 \cdot 2.2}{129.561}, \frac{2 \cdot 50 \cdot 2.2}{74.222} \right] = \underline{\underline{[1.7, 3.0]}}$$

$$\chi^2_{0.025, 100} \quad \chi^2_{0.975, 100}$$

Hypothesetesting.

Dekkes av pensumssidene i kap. 10 og forelesingsnotatene.

Hypothesetesting er en systematisk fremgangsmåte for å undersøke hypoteser (påstander) knyttet til parametre i sannsynlighetsfordelinger.

Eksempel: Bærebjelker. Bæreevnen antas normalfordelt med forventning μ og varians σ^2 . Før vi eventuelt tar i bruk bjelker av denne typen stiller vi som krav at $\mu > 5.5$ og $\sigma^2 < 0.25$. Tyder målingene 5.9, 6.1, 5.4, 5.9, 5.7, 6.5, 5.8, 6.0, 5.3, 6.3, 5.8, 5.8, 5.8 og 6.0 på at dette er oppfylt? $\square$

Eksempel: Levetid til ny type kretskort. Levetiden antas eksponensialfordelt med parameter β . Et mål i utviklingen av kretskortet var at det skulle ha en forventet levetid på mer enn 700. Tyder de observerte tidene 612, 1009, 95, 1303, 599, og 780 på at dette er oppfylt? $\square$

Barelysjelken: $H_0: \mu = 5.5$ $H_1: \mu > 5.5$
($\mu \leq 5.5$)

Formulere en hypotesetest:

Når vi skal test om en parameter θ kan påstås å være større enn en verdi θ_0 skriver vi dette som:

$H_0: \theta = \theta_0$ mot $H_1: \theta > \theta_0$

Når vi skal test om $\theta < \theta_0$ skriver vi:

$H_0: \theta = \theta_0$ mot $H_1: \theta < \theta_0$

Når vi skal test om $\theta \neq \theta_0$ skriver vi:

$H_0: \theta = \theta_0$ mot $H_1: \theta \neq \theta_0$

Merk at H_1 er påstanden vi skal undersøke om er riktig.

Prinsipp: Konservativ fremgangsmåte - ønsker ikke å påstå at det vi skal undersøke om er tilfelle, H_1 , virkelig er tilfelle med mindre dataene peker klart i denne retningen.

Vi antar derfor i utgangspunktet at H_0 er korrekt, og gjør all regning under denne antagelsen. Påstår bare H_1 dersom de observerte dataene er lite sannsynlige under H_0 -modellen og peker klart i retning av H_1 -modellen.

Mulige utfall:

	H_0 rett	H_1 rett
Forkast H_0	Type I feil	OK
Ikke forkast H_0	OK	Type II feil

Setter derfor $\alpha = P(\text{forkaste } H_0 | H_0 \text{ er rett})$
 liten.

$$= P(\text{Type I feil})$$

0.01

0.05 $\leftarrow \alpha$ kalles (signifikans-)nivået til testen.

0.10

ansvar som
advaring,
holder glass

NB! Resultatet av en hypotesetest er:

- Enten at vi forkaster H_0 - som vil si at vi påstår at H_1 er rett.
- Eller at vi ikke forkaster H_0 - som vil si at både H_0 og H_1 er mulige (H_1 er fremdeles mulig selv om dataene ikke peker sterkt i den retning!).

NB! Dette dekken ikke alle tyggen hypoteser - tester, men de vi skal se på i dette kurset - kurset!

Hypotesetesting

(I de situasjonene vi skal se på i dette kurset)

$X_1, \dots, X_n$ u.i.f. $f(x; \theta)$.

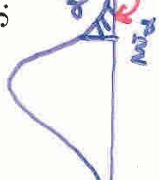
- a) $\theta > \theta_0$ } Ensidig
 b) $\theta < \theta_0$ } test
 c) $\theta \neq \theta_0$ } Tosidig test

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{mot} \quad H_1: \theta > \theta_0$$

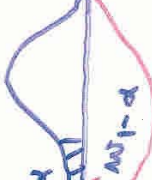
1. Finn estimator for θ : $\hat{\theta}$.

2. Finn en testobservator $W = h(\hat{\theta}, \theta_0)$ som har en kjent fordeling under H_0 .

3. Dersom testobservatoren $W = h(\hat{\theta}, \theta_0)$ er stor når $\hat{\theta}$ er stor og liten når $\hat{\theta}$ er liten så:



a) Forkaster vi H_0 dersom $W \geq w_\alpha$
 (der $P(\text{forkaste } H_0 | H_0) = P(W \geq w_\alpha | H_0) = \alpha$).



b) Forkaster vi H_0 dersom $W \leq w_{1-\alpha}$
 (der $P(\text{forkaste } H_0 | H_0) = P(W \leq w_{1-\alpha} | H_0) = \alpha$).

c) Forkaster vi H_0 dersom $W \leq w_{1-\alpha/2}$
 eller $W \geq w_{\alpha/2}$ (der $P(\text{forkaste } H_0 | H_0) =$

$$P(W \geq w_{\alpha/2} | H_0) + P(W \leq w_{1-\alpha/2} | H_0) = \alpha$$



Eksempel: Bæreevne til bærebjelker. $X_1, \dots, X_n$ u.i.f. $N(\mu, \sigma^2)$. Både μ og σ^2 er ukjente. Vi ønsker å teste om $\mu > 5.5$ og om $\sigma^2 < 0.25$.

Test for μ :

$$H_0: \mu = 5.5 \quad \text{mot} \quad H_1: \mu > 5.5$$

Estimator:

$$\hat{\mu} = \bar{X} \quad 5.5$$

Testobservator:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \quad \text{under } H_0$$

Vi forkaster H_0 dersom $T \geq t_{\alpha, n-1}$.

Velger vi $\alpha = 0.05$ får vi med $n = 14$ at vi forkaster H_0 dersom $T \geq t_{0.05, 13} = 1.771$.

Med de observerte dataene får vi $\bar{x} = 5.8786$ og

$$s = \sqrt{0.0972} = 0.312 \text{ som gir}$$

$$t = \frac{5.8786 - 5.5}{0.312/\sqrt{14}} = 4.54 > t_{0.05, 13} = 1.771$$

dvs vi forkaster H_0 på 5% nivå. Dataene gir grunnlag for å hevde at $\mu > 5.5$.

Dvs $\hat{\mu} = \bar{x} = 5.8786$ er så mye større enn 5.5 at det gir grunnlag for å hevde at $\mu > 5.5$

Dvs, vi kan gå på at $H_1: \mu > 5.5$ er konstatert.

Test for σ^2 :

$$H_0: \sigma^2 = 0.25 \quad \text{mot} \quad H_1: \sigma^2 < 0.25$$

$$\text{Estimator:} \quad \hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Teorem 8.4/tabell s. 27 gir at:

$$(n-1) \frac{S^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2 \quad \text{under } H_0$$

Vi forkaster H_0 dersom $(n-1) \frac{S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{1-\alpha, n-1}^2$.

Med $\alpha = 0.05$ og $n = 14$ blir $\chi_{1-\alpha, n-1}^2 = \chi_{0.95, 13}^2 = 5.892$

Observert:

$$(n-1) \frac{s^2}{\sigma_0^2} = (14-1) \frac{0.0972}{0.25} = 5.05 < \chi_{0.95, 13}^2 = 5.892$$

dvs vi forkaster H_0 på 5% nivå. Dataene gir grunnlag for å hevde at $\sigma^2 < 0.25$.

Dvs $\hat{\sigma}^2 = S^2 = 0.0972$ er så mye mindre enn 0.25 at det gir grunnlag for å hevde at $\sigma^2 < 0.25$.

□