

Egenskaper til estimatorer

Definisjon: En estimator $\hat{\theta}$ er en forventningsrett estimator for en parameter θ dersom:

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad \square \quad (\text{ikke systematisk feil})$$

Eksempel: Når vi bruker estimatoren $\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ for β i eksponensialfordelingen får vi:

$$E(\hat{\beta}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(T_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta = \beta$$

Dvs $\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i$ er forventningsrett.

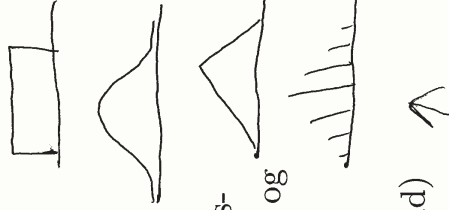
Generelt ønsker vi gjerne at en estimator $\hat{\theta}$ oppfyller

1. $E(\hat{\theta}) = \theta$
2. $\text{Var}(\hat{\theta})$ minst mulig

Dersom vi har flere forventningsrette estimatører å velge mellom bruker vi den med minst varians (se øving 4).

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\beta}) &= \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(T_i) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \beta^2 = \frac{1}{n^2} n \beta^2 = \frac{\beta^2}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}) \rightarrow 0 \text{ når } n \rightarrow \infty$$



Eksempel: Basert på u.i.f. observasjoner

$X_1, \dots, X_n$ ønsker vi å estimere forventningsverdien, μ . To forslag til estimatører: $\hat{\mu} = \bar{X}$ og $\tilde{\mu} = \tilde{X}$. Hvilken er best?

$$E(\hat{\mu}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu \quad (\text{alltid})$$

$$E(\tilde{\mu}) = \mu \quad (\text{dersom symmetrisk fordeling})$$

Dvs har vi en symmetrisk fordeling, f.eks. normal, uniform e.l., kan begge brukes. Har vi en usymmetrisk fordeling, f.eks. eksponensial, gamma, Weibull, etc., bør vi bruke gjennomsnittet.

$$\text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Det kan vises at for normalfordeling er $\text{Var}(\hat{\mu}) < \text{Var}(\tilde{\mu})$. Dvs for normalfordelte data er det best å bruke gjennomsnittet (men for andre symmetriske fordelinger kan medianen være bedre). $\square$

Sannsynlighetmaksimerings-estimator (SME), 9.15

(Maximum likelihood estimator, MLE).

$X_1, \dots, X_n$ u.i.f. $f(x; \theta)$.

Hvordan generelt finne en estimator for θ ?

Noen ganger kan vi finne gode estimatorer fra "sunn fornuft" / intuisjon, andre ganger er dette verre. Hvordan skal vi f.eks. estimere parametrene α og β i gamma- eller Weibullfordelingen?

Eksempel: $X_1, \dots, X_n$ u.i.f. Poisson med parameter λ , og $t = 1$, dvs

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Ut fra observerte data $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ ønsker vi å estimere λ .

Ide: Velg den verdien på λ som gjør det mest sannsynlig å observere det vi faktisk har observert!

$P(\text{observere det vi har observert})$

$$= P(X_1 = x_1 \cap \dots \cap X_n = x_n)$$

$$= f(x_1, \dots, x_n; \lambda)$$

$$\stackrel{\text{uavh.}}{=} f(x_1; \lambda) \cdots f(x_n; \lambda)$$

$$= \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \cdots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^{x_1 + \dots + x_n}}{x_1! \cdots x_n!} e^{-n\lambda}$$

Vi ønsker å finne den λ som maksimerer $f(x_1, \dots, x_n; \lambda)$.

Triks: Det blir nesten alltid enklere regning ved å først ta logaritmen:

$$\begin{aligned} \ln(f(x_1, \dots, x_n; \lambda)) &= \ln \left(\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1! \cdots x_n!} e^{-n\lambda} \right) = \ln \lambda^{\sum x_i} - \ln(x_1! \cdots x_n!) + \ln(e^{-n\lambda}) \\ &= \underbrace{\ln(\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i})}_{\sum \ln \lambda} - \ln(x_1! \cdots x_n!) + \ln(e^{-n\lambda}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(\lambda) - \ln(x_1! \cdots x_n!) - n\lambda \end{aligned}$$

Husk:

$$\begin{aligned} \ln(a \cdot b) &= \ln a + \ln b & \ln e &= 1 \\ \ln \frac{a}{b} &= \ln a - \ln b & \ln e^c &= c \\ \ln a^b &= b \cdot \ln a & (\ln x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$E(\hat{\lambda}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \lambda = \lambda \quad \text{Der. funn. null!}$$

$$\frac{\partial \ln(f(x_1, \dots, x_n; \lambda))}{\partial \lambda} \quad \rightarrow m = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{1}{\lambda} - 0 - n = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

Dvs SME for λ blir: $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$.

For eksemplet med ulykker på oljeplattform får vi estimatet $\hat{\lambda} = \frac{1}{5}(5 + 8 + 12 + 7 + 13) = 9$. $\square$

Notasjon:

$$L(\lambda) = f(x_1, \dots, x_n; \lambda)$$

$$l(\lambda) = \ln(L(\lambda))$$

der $L(\lambda)$ kalles likelihoodfunksjonen og $\ln(L(\lambda))$ kalles log-likelihoodfunksjonen.

Merk: $L(\lambda)$ og $l(\lambda)$ har samme maksimumspunkt siden $\ln(\cdot)$ er en strengt voksende funksjon.

Vi bør også sjekke at vi har funnet et maksimumspunkt (og ikke et minimumspunkt) ved å sjekke at $\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda^2} < 0$ for $\lambda = \hat{\lambda}$.

I eksemplet: $\frac{\partial^2 l(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{-\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda^2} < 0$, dvs OK!

$$l'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \ln[L(\lambda)] = \frac{1}{L(\lambda)} \cdot L'(\lambda) = 0$$

$$l'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow L'(\lambda) = 0$$

Ent følger dette direkte av at $\ln(\cdot)$ er monoton

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \quad \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

SME generelt:

$X_1, \dots, X_n$ u.i.f. $f(x; \theta)$.

1. Definer likelihood-funksjonen:

$$L(\theta) = f(x_1, \dots, x_n; \theta)$$

$$\stackrel{\text{uavh.}}{=} f(x_1; \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

2. Ta $\ln(\cdot)$:

$$l(\theta) = \ln[L(\theta)] = \sum_{i=1}^n \ln[f(x_i; \theta)]$$

3. Deriver m.h.p. θ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta} \ln[f(x_i; \theta)]$$

4. Sett den deriverte lik null og løs mhp θ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} l(\theta) = 0 \quad \text{gir } \hat{\theta}$$

5. Sjekk at:

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\theta) < 0 \quad \text{for } \theta = \hat{\theta}$$

Exempel Böjehöjden.

$$f_X(x) = \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta}$$

$$E(X) = \frac{1}{2} \sqrt{\theta \pi}$$

Antar at vi observerer höjden til n uafh. følger, $X_1, \dots, X_n$ fra nærværende bøjehøjstasjon.

Hvordan kan vi få dette anslå θ ? $e \cdot x = e^{a+b}$

$$1) L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta} e^{-x_i^2/\theta} = \frac{2^n \prod_{i=1}^n x_i}{\theta^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2/\theta}$$

$$2) \ell(\theta) = \ln L(\theta) = \ln(2^n) + \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) - n \ln \theta + \ln e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2/\theta} \\ = \ln(2^n) + \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) - n \ln \theta - \sum_{i=1}^n x_i^2/\theta$$

$$3) \ell'(\theta) = -n \cdot \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \quad = \frac{1}{\theta} \sum x_i^2$$

$$4) \frac{n}{\theta} = \frac{1}{\theta^2} \sum x_i^2 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Her vi g. ikr. observert 50 følger som gav $\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 109.6$

Vår estimat: $\hat{\theta} = \frac{1}{50} \cdot 109.6 = \underline{\underline{2.2}}$

Eksempel: $X_1, \dots, X_n$ u.i.f. fra fordeling med tetthet

$$f(x; \theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}, \quad x > 1$$

Finn en estimator for θ :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i^{\theta+1}} = \frac{\theta^n}{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta+1}}$$

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = n \ln(\theta) - (\theta + 1) \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)$$

$$= n \ln(\theta) - (\theta + 1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

$$\ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln(x_i) = 0$$

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln(X_i)}$$

Sjekk: $\ell''(\hat{\theta}) = -\frac{n}{\hat{\theta}^2} < 0$ dvs maksimum.

Med observerte data 12.0, 11.2, 13.5, 12.3, 13.8 og 11.9 får vi estimatet:

$$\hat{\theta} = \frac{6}{\sum_{i=1}^6 \ln(x_i)} = \underline{\underline{0.397}}. \quad \square$$

Usikkerhet i estimatet:

En (punkt-)estimator $\hat{\theta}$ gir oss et anslag på en ukjent parameterverdi, men gir oss ikke noen direkte informasjon om usikkerheten i anslaget.

Kan vi anta at den estimerte verdien vi har fått er svært nær den sanne verdien, eller er det grunn til å frykte at vi er langt unna sann verdi?

Dette kan vi si noe om f.eks. ved å lage konfidensintervaller, men for å få til det må vi kjenne fordelingen til estimatoren.

Og for å kunne finne fordelingen til ulike estimatorer (som alltid er funksjoner av stokastiske variable) må vi kunne noe om fordelingen til funksjoner av stokastiske variable. Dette er omhandlet i kap. 7 i læreboka.