

Ordningsvariable og ekstremvariable.

Dekkes av notatet om ordningsvariable og ekstremvariable.

Anta at vi har $X_1, X_2, \dots, X_n$ uavh. identisk fordelte stok. var. med kumulativ fordelingsfunksjon $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Sorter $X_1, X_2, \dots, X_n$ slik at: $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Dette kalles *ordningsvariable*.

Spesielt er

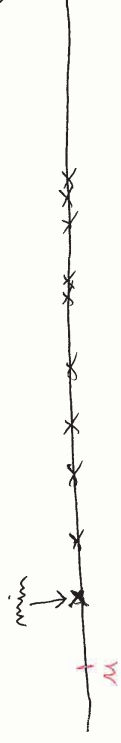
$$X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

$$X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

og disse kalles ekstremvariable.

Eksempel på ekstremvariable: Levetid til hhv seriesystem og parallellsystem. Maksimal bølgehøyde eller maksimal vindstyrke i et tidsintervall, etc.

$\min x \Rightarrow \text{alle } x > u$



Fordelingen til $U = X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (f.eks. seriesystem):

$$F_U(u) = P(U \leq u)$$

$$= P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq u)$$

$$= 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > u)$$

$$= 1 - P((X_1 > u) \cap \dots \cap (X_n > u))$$

uavh.

$$= 1 - P(X_1 > u) \dots P(X_n > u)$$

$$= 1 - [1 - F_X(u)]^n$$

Samme fordeling

$$P(X \leq x) = F_X(x)$$

$$P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

Hvis X er kontinuerlig fordelt blir:

$$f_U(u) = \frac{d}{du} F_U(u) = n[1 - F_X(u)]^{n-1} f_X(u)$$



Eksempel: Seriesystem av komponenter med eksponensialfordelte levetider. Antar at $X_1, X_2, \dots, X_n$ uavh. eksponensialfordelte med forventning β . Dvs

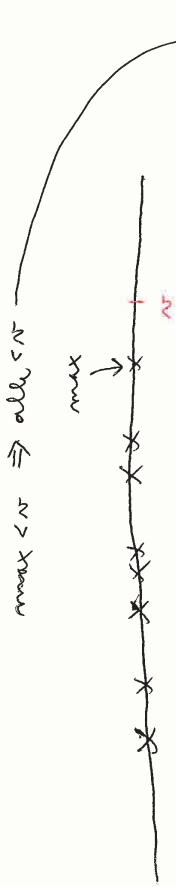
$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0$$

som gir $F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-u/\beta} du = 1 - e^{-x/\beta}$.

Dvs for levetiden til systemet, $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, får vi

$$\begin{aligned} F_U(u) &= 1 - [1 - F_X(u)]^n \\ &= 1 - [1 - (1 - e^{-u/\beta})]^n \\ &= 1 - [e^{-u/\beta}]^n = 1 - e^{-nu/\beta} \\ \Rightarrow f_U(u) &= \frac{d}{du} F_U(u) = \frac{n}{\beta} e^{-nu/\beta} \end{aligned}$$

Dvs levetiden til systemet er eksponensialfordelt med forventning β/n . $\square$



Fordeling til $V = X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (f.eks. parallelsystem):

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V \leq v) \\ &= P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq v) \\ &= P((X_1 \leq v) \cap \dots \cap (X_n \leq v)) \\ &\stackrel{\text{uavh.}}{=} P(X_1 \leq v) \cdots P(X_n \leq v) \\ &\stackrel{\text{samme fordeling}}{=} [F_X(v)]^n \end{aligned}$$

$P(X \leq x) = F_X(x)$

Hvis X er kontinuertlig fordelt blir:

$$f_V(v) = \frac{d}{dv} F_V(v) = n[F_X(v)]^{n-1} f_X(v)$$

Fordelingen til $X_{(k)}$: Les selv! Kan bl.a. brukes til å finne fordelingen til medianen.

Eksempel Bølgehøjde

$$f_X(x) = \frac{2x}{\theta} e^{-x^2/\theta}, \quad x > 0$$

$$F_X(x) = \int_0^x f(u) du = \int_0^x \frac{2u}{\theta} e^{-u^2/\theta} du = \left[-e^{-u^2/\theta} \right]_0^x \\ = -e^{-x^2/\theta} - (-1) = 1 - e^{-x^2/\theta}$$

Anta $\theta = 2.5$. Anta videre at bølgehøjden er norm. (realistisk?) og at det i løbet av tiden en arbeidsoperasjon skal utføres vil komme $n = 400$ bølger.

Hva er sanns. for at den høyeste bølgen er høyere enn 4 m?

$$V = \max \{X_1, \dots, X_{400}\}$$

$$P(V \leq 4) = 1 - P(V > 4) = 1 - F_V(4) = 1 - F_X(4)^{400} \\ = 1 - \left[-e^{-4^2/2.5} \right]^{400} = 1 - 0.51 = \underline{\underline{0.49}}$$

$$P(V > 5) = 1 - F_X(5)^{400} = 1 - \left[-e^{-5^2/2.5} \right]^{400} = 1 - 0.98 \\ = \underline{\underline{0.02}}$$

Litt mer om eksponensialfordelingen og Poisson-prosesser.

Dekkes av 5.6, 6.6, 6.7 og det som står under.

Eksponensialfordelingen

Så langt har vi lært at det finnes to parametriseringer av eksponensialfordelingen som brukes om hverandre. Enten brukes

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0,$$

som gir $E(X) = \beta$ og $\text{Var}(X) = \beta^2$, eller

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

som gir $E(X) = 1/\lambda$ og $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$. Dvs sammenhengen er $\beta = 1/\lambda$.

Videre har vi lært har at dersom $X_1, \dots, X_k$ er uavh. eksponensialfordelte med forventning β så er $U = \min(X_1, \dots, X_k)$ eksponensialfordelt med forventning β/k . (Mens max av eksponensialfordelte ikke er eksponensialfordelt!)

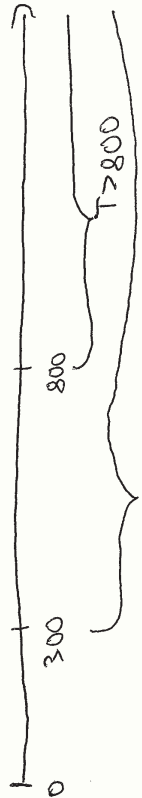
Vi har også nevnt at en sum av uavhengige identisk eksponensialfordelte variable er gammafordelt. Dersom $X_1, \dots, X_k$ uavh. eksponensialfordelte med forventning β er $Y = \sum_{i=1}^k X_i$ gammafordelt med parametre $\alpha = k$ og β .

Nå skal vi se at eksponensialfordelingen er *hukommelsesløs*!

Eksempel: Du har kjøpt en lyspære som du så langt har brukt i 300 timer og den fungerer fremdeles. Hva er sannsynligheten for at den vil fungere i 500 timer til? La T være levetiden til lyspæren og anta at T er eksponensialfordelt med forventning β . Vi har da

$$P(T > t) = \int_t^\infty \frac{1}{\beta} e^{-u/\beta} du = [-e^{-u/\beta}]_t^\infty = e^{-t/\beta}.$$

Vi skal finne $P(T > 500 + 300 | T > 300) = P(T > 800 | T > 300)$:



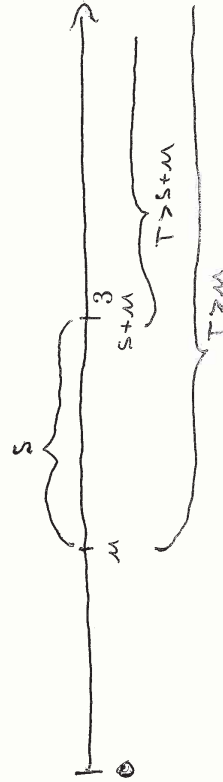
$$\begin{aligned}
 P(T > 800 | T > 300) &= \frac{P((T > 800) \cap (T > 300))}{P(T > 300)} \\
 P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
 P(T > t) &= e^{-t/\beta} \\
 &= \frac{P(T > 800)}{P(T > 300)} \\
 &= \frac{e^{-800/\beta}}{e^{-300/\beta}} = e^{-\frac{800}{\beta} + \frac{300}{\beta}} = e^{-500/\beta} = P(T > 500)
 \end{aligned}$$

Dvs sannsynligheten for at ei lyspære som vi ser at fungerer etter 300 timer skal fungere i 500 timer til er like stor som sannsynligheten for at ei ny pære skal fungere i 500 timer!! (dersom levetiden er eksponensialfordelt) $\square$

NB! Dette gjelder kun eksponentialfordeling og geometrisk.

Generelt har vi for eksponensialfordelingen at:

$$\begin{aligned}
 P(T > s + u | T > u) &= \frac{P((T > s + u) \cap (T > u))}{P(T > u)} \\
 &= \frac{P(T > s + u))}{P(T > u)} \\
 &= \frac{e^{-(s+u)/\beta}}{e^{-u/\beta}} \\
 &= e^{-s/\beta} = P(T > s)
 \end{aligned}$$



Denne egenskapen kaller vi at eksponensialfordelingen er hukommelsesløs.

Dersom T er en funksjonstid kan vi tenke på dette som at systemet/komponenten med eksponensialfordelt levetid verken forbedres eller forverres over tid. Dvs eksponensialfordeling er best egnet som modell for fenomen hvor feil/hendelser skjer "spontan" (ikke aldring, gradvis utmatting, "barnesykdommer", e.l.).

Det kan vises at eksponensialfordelingen er den eneste kontinuerlige fordeling som er hukommelsesløs. Blant de diskrete fordelingene er geometrisk fordeling hukommelsesløs.

Kort oppsummert:

- Eksponensialfordelingen er hukommelsesløs.
- Minimum av k uavh. eksponensialfordelte variable med forventning β er eksponensialfordelt med forventning β/k .
- Sum av k uavh. eksponensialfordelte variable med forventning β er gammafordelt med $\alpha = k$ og $\beta = \beta$.