

Kapittel 3: Kombinatorikk

Kombinatorikk handler om å telle opp antall muligheter i ulike situasjoner (for eksempel telle opp antall gunstige og antall mulige i forbindelse med sannsynlighetsberegninger).

Eksempel:

I en klasse med 14 jenter og 12 gutter skal det velges en representant for jentene og en for guttene. Hvor mange mulige kombinasjoner av representanter finnes det?

Svar: Antall muligheter er $14 \cdot 12 = 168$

Generell regel:

Dersom vi har m_1 muligheter ved valg 1, m_2 muligheter ved valg 2, ..., m_k muligheter ved valg k og det ikke er koblinger mellom valgene har vi totalt $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$ muligheter.

Ordnete utvalg med og uten tilbakelegging

Noen ganger spiller rekkefølgen av valg en rolle. For eksempel ved trekking av vinnerne i et lotteri kan det være slik at den første som trekkes ut får førstepremien, den andre som trekkes ut får andrepremien osv.

Når rekkefølgen har betydning sier vi at vi har et ordnet utvalg.

Eksempel:

Lotteri. $N=100$ personer har tatt lodd, $s=4$ ulike gevinster skal loddene ut. Den som trekkes ut i første trekning får førstepremien, den som trekkes ut i andre trekning får andre premien osv.

Dersom alle kan trekkes ut hver gang (mulig å vinne flere ganger) har vi trekning med tilbakelegging.

Antall mulige fordelinger av premiene er da:

$$100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 = 100^4 = 100\,000\,000$$

Eksempel:

Lotteri. $N=100$ personer med lodd og $s=4$ ulike gevinster som før. Men anta nå at de som trekkes ut som vinnere ikke er med i den videre trekningen (ikke mulig å vinne flere ganger). Da har vi trekning uten tilbakelegging.

Antall mulige fordelinger av premiene er da:

$$100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 = 94\,109\,400$$

Generelle regler:

•Antall mulige ordnede kombinasjoner når vi velger ut s objekter blant N objekter med tilbakelegging er

$$N \cdot N \cdot \dots \cdot N = N^s$$

•Antall mulige ordnede kombinasjoner når vi velger ut s objekter blant N objekter uten tilbakelegging er

$$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-s+1)$$

Merk:

Husk at $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Det kan vises at (se boka):

$$N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-s+1) = \frac{N!}{(N-s)!}$$

Eksempel: Hvor mange ordnede kombinasjoner kan vi lage dersom vi trekker ut to av bokstavene a, b, c og d

- Med tilbakelegging
- Uten tilbakelegging

• Med tilbakelegging: $4 \cdot 4 = 16$ kombinasjoner:

$aa \quad ab \quad ac \quad ad \quad ba \quad bb \quad bc \quad bd$
 $ca \quad cb \quad cc \quad cd \quad da \quad db \quad dc \quad dd$

• Uten tilbakelegging: $4 \cdot 3 = 12$ kombinasjoner:

$ab \quad ac \quad ad \quad ba \quad bc \quad bd$
 $ca \quad cb \quad cd \quad da \quad db \quad dc$

Viktig spesialtilfelle:

Dersom vi lager ordnede kombinasjoner uten tilbakelegging av alle objektene ($s=N$) får vi at dette kan gjøres på $N!$ ulike måter.

Dette er det samme som antall måter å sortere de N objektene.

Eksempler:

• Hvor mange ordninger kan vi lage av bokstavene a, b, c og d ?

Svar: $4! = 24$

$abcd \quad abdc \quad acbd \quad acdb \quad adbc \quad adcb \quad bacd \quad badc$
 $bcad \quad bcda \quad bdac \quad bdca \quad cabd \quad cadb \quad cbad \quad cbda$
 $cdab \quad cdba \quad dabc \quad dacb \quad dbac \quad dbca \quad dcab \quad dcba$

• På hvor mange måter kan vi sortere kortene i en kortstokk?

Svar: $52! = 8 \cdot 10^{67}$

Uordnede utvalg uten tilbakelegging

Ofte er det slik at rekkefølgen av valg ikke spiller noen rolle. For eksempel trekking av vinnertall i lotto – rekkefølgen tallene trekkes ut i spiller ikke noen rolle, kun hvilke tall som er med eller ikke. Når rekkefølgen ikke har betydning har vi et uordnet utvalg.

Eksempel:

Lotto. 7 vinnertall trekkes blant 34 tall.

Antall måter å trekke ut 7 tall fra 34 dersom man tar hensyn til rekkefølgen er: $\frac{34!}{(34-7)!} = 27113264640$

Men rekkefølgen spiller ikke noen rolle, vi må derfor dele dette tallet på antall måter å sortere de 7 valgte tallene, og får at antall mulige lottorekker (når rekkefølgen tallene trekkes i er uten betydning) blir:

$$\frac{34!}{(34-7)!7!} = 5379616$$

Generelle regler:

•Antall mulige uordnede kombinasjoner når vi velger ut s objekter blant N objekter uten tilbakelegging er

$$\frac{N!}{s!(N-s)!} = \binom{N}{s}$$

Eksempel:

En klubb har 20 medlemmer, et styre på 4 skal velges. Hvor mange mulige styre kan velges? (Vi ser bare på hvem som er med eller ikke med i styret – ikke på eventuell fordeling av verv i styret)

Svar:

$$\binom{20}{4} = \frac{20!}{4!(20-4)!} = 4845$$

Vi skal særlig bruke tellereglene vi har lært nå til å telle opp antall gunstige og antall mulige i uniforme sannsynlighetsmodeller – dvs som et hjelpemiddel til å regne ut sannsynligheten i uniforme modeller.

Eksempel:

Dersom du tipper 1 rekke i lotto er sannsynlighet for å få 7 rette:

$$P(7 \text{ rette}) = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{1}{5379616} = 0.00000019 = 1.9 \cdot 10^{-7}$$

Dersom du tipper 8 rekke i lotto er sannsynlighet for å få 7 rette:

$$P(7 \text{ rette}) = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{8}{5379616} = 0.0000015 = 1.5 \cdot 10^{-6}$$

Eksempel:

Klubb med 20 medlemmer, 12 kvinner og 8 menn. Et styre på 4 skal velges ved loddtrekning. Hva er sanns. for et styre med kun kvinner?

$$\text{antall mulige styre} = \binom{20}{4} = 4845$$

$$\text{antall styre med kun kvinner} = \binom{12}{4} = 495$$

$$P(\text{styre med kun kvinner}) = \frac{\text{antall gunstige}}{\text{antall mulige}} = \frac{495}{4845} = 0.10$$

Hva er sanns. for at det blir valgt et styre med minst en mann?

Hva er sanns. for at det blir valgt et styre med 2 kvinner og 2 menn?

Eksempel: Bursdagsproblemet

I en gruppe på M personer – hva er sannsynligheten for at to eller flere har bursdag samme dag?

Ser først på hendelsen $A = \text{”alle } M \text{ har bursdag på ulike dager”}$

$$\text{antall gunstige utfall} = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - (M - 1)) = \frac{365!}{(365 - M)!}$$

$$\text{antall mulige utfall} = 365^M$$

$$P(A) = \frac{365!/(365 - M)!}{365^M}$$

Vi er interesserte i $A^c = \text{”minst to har bursdag samme dag”}$

$$P(A^c) = 1 - \frac{365!/(365 - M)!}{365^M}$$

M	10	20	22	23	30	40	60
$P(A^c)$	0.117	0.411	0.476	0.507	0.706	0.891	0.994

Oppsummering

- k ukoblede valg med $m_1, m_2, \dots, m_k$ valgmuligheter i hvert gir totalt $m_1 \cdot m_2 \cdots m_k$ muligheter
- Antall mulige ordnede kombinasjoner når vi velger ut s objekter blant N objekter med tilbakelegging er

$$N \cdot N \cdots N = N^s$$

- Antall mulige ordnede kombinasjoner når vi velger ut s objekter blant N objekter uten tilbakelegging er $\frac{N!}{(N - s)!}$

Spesialtilfelle: Antall måter å sortere/ordne N objekter er $N!$

- Antall mulige uordnede kombinasjoner når vi velger ut s objekter blant N objekter uten tilbakelegging er

$$\binom{N}{s}$$