РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

ИЗВЕСТИЯ

МАТЕМАТИКА
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ИНФОРМАТИКА И
УПРАВЛЕНИЕ

Серия МММИУ том 3 1999 номер 2

Russian Academy of Natural Sciences
T R A N S A C T I O N S

MATHEMATICS. MATHEMATICAL MODELING.
INFORMATICS & CONTROL.

Editorial Office: Molodogvardeiskaya, 196, Samara (443001), Russia
Tel: (8462)-320275 FAX: (8462)-332823 E-mail: izvraen@ssu.samara.ru

Подписано в печать 22 октября 1999 г. Формат 84 × 108. Бумага офсетная. Печать оперативная. Тираж 250 экз. Отпечатано с готовых оригинал–макетов в типографии ООО "Офорт, 443068, Самара, Межевая, 7. Заказ № 136. Изд-во ООО НВФ "СМС". Лицензия ЛР 065263 от 2 июля 1997 г.

Адрес редакции: 443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 196.
Телефон: (8462) - 320275 FAX: (8462)-332823
e-mail: izvraen@ssu.samara.ru

ISBN 5-8017-0051-x

permit to construct the nontrivial examples of the right-invariant bundle morphisms over $D(M)$ and to simplify the proofs of well known theorems on the right-invariant objects smoothness.

Belopolskaya Ya. I., Gliklikh Yu. E. **Diffusive Processes on the Groups of Diffeomorphisms and the Viscous Fluid Hydrodynamics.** — TRANSACTIONS of RANS, series MMMIC, 1999, v. 3, № 2 (27–35)

Two approaches to the description of the viscous fluid hydrodynamics based on the usage of stochastic differential equations on the Gilbert manifold of diffeomorphisms are presented. For the sake of simplicity fluid dynamics is considered on the $n-$dimensional torus.

Gumenjuk P. A., Zakharov A. M., Kuznetsov A. A. **Extremal Problems for the Class of Functionals and the Roth Conjectures.** — TRANSACTIONS of RANS, series MMMIC, 1999, v. 3, № 2 (36–59)

In the paper a problem to maximize the functional $J(a_2, a_3) = Re\left(a_3 + \alpha a_2^2\right) + \beta|a_2|^2$ on the class S of holomorphic univalent functions normalized by $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$ is considered. For all real parameters α and β its maximal values are found, and all extremal functions and their geometrical properties are described. All the real values of α and β for which the Koebe function or its rotation are extremal are determined. This proves the Roth conjectures.

Kouchmantseva V. A. **On Triviality Condition of One Parameter Group of Isometries.** — TRANSACTIONS of RANS, series MMMIC, 1999, v. 3, № 2 (60–69)

The author considers strongly continuous one-parameter group T of isometries in complex Banach space X. It is proved that spectrum of infinitesimal generator of group T, acting almost transitively consists of one point (T is trivial) and that the property of almost transitivity is equivalent to some limit equality for such a group formerly found by J. Goldstein and B. Nagy. If such group acts transitively, then X is Hilbert space. Finally, it is shown that for separable rearrangement-invariant functional spaces on [0,1] the group T is trivial under some weaker limit equality.

Voropaeva N. V. **Reduction of Dimension in the Models of Multitempo Dynamic Systems.** — TRANSACTIONS of RANS, series MMMIC, 1999, v. 3, № 2 (70–103)

The method of decomposing for nonlinear differential systems with a few time scales is presented. The method permits to transform the initial system to the "block-triangular" form. The decoupling transformation is constructed as asymptotic series. Some examples are examined.

Riznichenko G. Yu. **Nonlinear Science Mentality.** — TRANSACTIONS of RANS, series MMMIC, 1999, v. 3, № 2 (104–116)

The advantages of nonlinear mentality and the perspectives it provides are discussed in the paper.

ИЗВЕСТИЯ РАЕН серия МММИУ
том 3 1999 номер 2 (36 – 59)

УДК 517.54

Экстремальные задачи для семейства функционалов и гипотезы Рота

П. А. Гуменюк, А. М. Захаров, А. А. Кузнецов

Аннотация

В настоящей работе[1] рассматривается задача максимизации функционала $J(a_2, a_3) = \Re e\,(a_3 + \alpha a_2^2) + \beta|a_2|^2$ на классе S всех голоморфных однолистных функций с разложением $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. Для всех действительных значений параметров α и β получено его максимальное значение, описаны все экстремальные функции и их геометрические свойства. Найдены все действительные значения α и β, при которых функция Кёбе или её вращения являются экстремальными, и тем самым доказаны гипотезы, высказанные Ротом в [10].

Введение

Классом S назовём множество всех голоморфных однолистных в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций f, нормированных разложением $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$. Обозначим через $S_{\mathbf{R}}$ совокупность функций $f \in S$, имеющих действительные коэффициенты.

Для действительных A и B рассмотрим проблему максимизации функционала

$$J(a_2, a_3) = \Re e\left(a_3 + \alpha a_2^2\right) + \beta|a_2|^2 =$$
$$= \Re e\left(a_3 + \left(\frac{A-B}{2} - 1\right) a_2^2\right) + \frac{A+B}{2}|a_2|^2 \qquad (1)$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 98-01-00842

на классе S^2. В частности, нас будет интересовать, при каких значениях параметров A и B максимум данного функционала будет достигаться для функции Кёбе $K_0(z) = z/(1-z)^2$ или её вращений $K_\theta(z) = e^{-i\theta}K_0(e^{i\theta}z)$, которые играют важную роль в экстремальных задачах.

Ранее эта проблема изучалась для двух однопараметрических семейств функционалов

$$J_c(a_2, a_3) = \Re e(a_3 - ca_2^2) + c\,|a_2|^2\,, \qquad c \in \mathbb{R},$$

$$J_p(a_2, a_3) = \Re e\left(a_3 - \frac{3-p}{3}a_2^2\right) + \frac{p+1}{3}|a_2|^2, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

Якубовский и Зысковская [7] получили максимальное значение функционала J_c при $c \notin \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ и его оценку сверху при $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Для $p = 2$ функционал J_p изучался Блэттером [4]. Он доказал, что в этом случае функция Кёбе доставляет максимум J_p. Позднее Ким и Минда [8] показали, что аналогичное утверждение справедливо и для $p = 3/2$. Кроме того, в [10] указано, что Рушевейем было численно доказано, что при $p = 1$ функция Кёбе не является экстремальной для функционала J_p.

Ротом [10] были высказаны следующие

Гипотезы:

(а) при $2c \le e/(e-1)$ максимум функционалу J_c доставляют только функции $K_{\pi/2}$ и $K_{-\pi/2}$;

(б) при $1 < 2c < e/(e-1)$ ни одна из функций K_θ не является экстремальной для функционала J_c;

(в) при $2p \ge (2e^3+1)/(e^3-1)$ максимум функционалу J_p доставляют только функции K_0 и K_π;

(г) при[3] $3\log^{-1}4 - 1 < 2p < (2e^3+1)/(e^3-1)$ ни одна из функций K_θ не является экстремальной для функционала J_p;

(д) при $2p \le 3\log^{-1}4 - 1$ максимум функционалу J_p доставляют только функции $K_{\pi/2}$ и $K_{-\pi/2}$.

Нами были найдены значения максимума J при всех действительных A и B. Определены все значения параметров, при кото-

[2]Отметим, что проблема минимизации J сводится к поставленной задаче. Действительно, записав функционал в виде $J = \Re e\, a_3 + (A-1)\Re e^2 a_2 + {}$ $+(B+1)\Im m^2 a_2$, легко заметить, что функция $f \in S$ доставляет ему минимум при $A = A_0$, $B = B_0$ тогда и только тогда, когда функция $-if(iz)$ доставляет J максимум при $A = -B_0$, $B = -A_0$.

[3]Прим. редактора: здесь и в дальнейшем через log обозначается натуральный логарифм.

рых максимум функционала J достигается для функции Кёбе и её вращений, в частности, доказаны гипотезы Рота (а)–(д).

Кроме того, для всех действительных значений параметров A и B описаны экстремальные функции и установлены их геометрические свойства.

Обозначим через $D_1, \dots, D_6$ следующие области плоскости параметров (A, B) :
$D_1 = \{(A, B) : A < 0, B < 0\}$;
$D_2 = \left\{(A, B) : B > 0, A < \log^{-1}\frac{B+1}{B}\right\}$;
$D_3 = \{(A, B) : 0 < A < 1, B < 0\}$;
$D_4 = \{(A, B) : A > 1, B < 0\}$;
$D_5 = \left\{(A, B) : B > 0, A > e^{\frac{1}{B}}/(e^{\frac{1}{B}} - 1)\right\}$;
$D_6 = \left\{(A, B) : B > 0, \log^{-1}\frac{B+1}{B} < A < e^{\frac{1}{B}}/(e^{\frac{1}{B}} - 1)\right\}$.
Через $\overline{D}_k$, $k = 1, \dots, 6$, будем обозначать замыкания D_k.

Сформулируем основные результаты в следующей теореме.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*

(а) если $(A, B) \in \overline{D}_1$, то $\max\limits_{f \in S} J(a_2, a_3) = 1$;

множество экстремальных функций состоит только из семейства

$$f_r(z) = \frac{z}{1 + 2irz - z^2}, \qquad -1 \le r \le 1,$$

в случае $B = 0$, и только из функции f_0 в случае $B < 0$;

(б) если $(A, B) \in \overline{D}_2 \backslash \overline{D}_1$, то $\max\limits_{f \in S} J(a_2, a_3) = 4B+1$ и максимум достигается только для функций f_1 и f_{-1};

(в) если $(A, B) \in D_3$, то $\max\limits_{f \in S} J(a_2, a_3) = 1 + 2e^{2(A-1)/A}$ и при каждом фиксированном A максимум достигается только для двух функций $g_0(z)$, $-g_0(-z) \in S_{\mathbf{R}}$, которые отображают E на плоскость с двумя разрезами. В предельном случае $B = 0$ при каждом фиксированном $A \in (0; 1)$ существуют четыре однопараметрических семейства экстремальных функций, в каждом из которых только одна функция отображает E на плоскость с одним разрезом;

(г) если $(A, B) \in \overline{D}_4 \cup \overline{D}_5$, то $\max\limits_{f \in S} J(a_2, a_3) = 4A-1$ и максимум достигается только для функций K_0 и K_π;

(д) если $(A, B) \in D_6$, то

$$\max_{f \in S} J(a_2, a_3) = \operatorname{ctg}(\xi - \varphi) \sin 2\xi + \frac{\sin(\xi + \varphi)}{\sin(\xi - \varphi)},$$

где (φ, ξ), $0 < \varphi < \xi < \pi/2$, *однозначно определяется равенствами*

$$A = \frac{1}{1 - \log \frac{\cos \xi}{\cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi \, (\varphi - \xi - \operatorname{ctg} \xi)};$$

$$B = \frac{1}{\log \frac{\sin \xi}{\sin \varphi} - 1 + \operatorname{ctg} \varphi \, (\varphi - \xi + \operatorname{tg} \xi)};$$

для каждой фиксированной точки $(A, B) \in D_6$ *максимум* J *достигается только для четырёх функций, которые отображают* E *на плоскость с одним гладким разрезом, отличным от радиального луча.*

Следствие 1. *Гипотезы (а)–(д) справедливы.*

Для доказательства теоремы был использован принцип максимума Понтрягина применительно к уравнению Лёвнера.

В первой части статьи рассматриваемая задача формализуется как задача оптимального управления для фазовой системы, которая следует из уравнения Лёвнера. Во второй части излагаются основные леммы, необходимые для доказательства Теоремы 1, которое вместе с доказательством Следствия 1 приводится в третьей части.

1. Формализация экстремальной задачи как задачи оптимального управления

Известно [1], что всюду плотное множество функций класса S можно представить с помощью интегралов $w(z, t)$ обыкновенного дифференциального уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \frac{e^{iu} + w}{e^{iu} - w}, \quad w(z, 0) = z, \quad |z| < 1, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

по формуле

$$f(z) = \lim_{t \to +\infty} e^t w(z, t). \tag{3}$$

Здесь $u = u(t)$ является кусочно-непрерывной на $[0; +\infty)$. Функцию $f(z)$ будем называть *порождённой управлением* $u(t)$.

Управления, разность которых кратна 2π, будем отождествлять, т. к. они порождают одну и ту же функцию. При этом управление $u_0(t)$ следует считать разрывным в точке t_0 тогда и только тогда, когда в этой точке разрывны все $u(t) \equiv u_0(t) (\mathrm{mod}\, 2\pi)$.

З а м е ч а н и е 1. Известно (см., например, [1, 5]), что поскольку фнкционал J зависит только от a_2 и a_3, функции, экстремальные для него, отображают E на плоскость с одним или двумя кусочно-гладкими разрезами.

З а м е ч а н и е 2. Как следует из теории Лёвнера, всякая функция $f \in S$, отображающая E на плоскость с одним или двумя кусочно-гладкими разрезами, может быть порождена управлением, непрерывным всюду на $[0; +\infty)$, за исключением, может быть, одной точки, где оно имеет разрыв первого рода.

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать все управления именно такими.

З а м е ч а н и е 3. Известно (см., например, [2]), что если управление $u(t)$ является кусочно-гладкой функцией и производная $u'(t)$ ограничена на $[0; +\infty)$, то оно порождает функцию $f(z)$, отображающую E на плоскость с одним разрезом. При этом, если управление всюду гладко, то разрез тоже гладкий. Если же управление разрывно, то функция $f(z)$ отображает E на плоскость с двумя разрезами.

З а м е ч а н и е 4. Если $f(z)$ экстремальна для функционала J, то экстремальны также функции $-f(-z)$, $\overline{f(\bar{z})}$ и $-\overline{f(-\bar{z})}$.

З а м е ч а н и е 5. Нетрудно видеть, что если управление $u_0(t)$ порождает функцию $f(z)$, то управления $u_1(t) = u_0(t) + \theta$ и $u_2(t) = -u_0(t)$ порождают функции $e^{i\theta} f(e^{-i\theta} z)$ и $\overline{f(\bar{z})}$, соответственно.

Пусть $w(z,t) = e^{-t}(z + a_2(t)z^2 + a_3(t)z^3 + \ldots)$. Подставив это разложение в (2) и приравняв коэффициенты при z^2 и z^3, получим дифференциальные уравнения для $a_2(t) = x_1(t) + i x_2(t)$ и $\Re e\, a_3(t) = x_3(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2e^{-t} \cos u(t), & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = 2e^{-t} \sin u(t), & x_2(0) = 0 \\ \dot{x}_3 = -4e^{-t} \left(x_1 \cos u(t) + x_2 \sin u(t) \right) - \\ \qquad\qquad - 2e^{-2t} \cos 2u(t), & x_3(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

З а м е ч а н и е 6. Если зафиксировать некоторую функцию класса S, то функционал $J(a_2, a_3)$ можно рассматривать как линейную функцию двух действительных параметров A и B

$$J = A \Re e^2 a_2 + B \Im m^2 a_2 + \Re e\, a_3 + \Im m^2 a_2 - \Re e^2 a_2.$$

Поэтому справедливо утверждение

(а) множество точек плоскости параметров, в которых данная функция доставляет функционалу J максимум, выпукло.

Кроме того, как известно [1], $\max|a_2|$ среди функций класса S достигается только для вращений функции Кёбе. При этом, a_2 действительно, если $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, и чисто мнимо, если $\theta = \pm\pi/2$. Поэтому также справедливы и следующие утверждения:

(б) если при $A = A_0, B = B_0$ какая-либо из функций K_θ экстремальна для J, то для $A = A_0 + l, B = B_0 + l$, $l > 0$, все экстремальные функции являются вращениями функции Кёбе;

(в) если при $A = A_0, B = B_0$ функции K_0, K_π экстремальны, то при $B = B_0$ и любом $A > A_0$ экстремальны они и только они;

(г) если при $A = A_0, B = B_0$ функции $K_{\pi/2}$, $K_{-\pi/2}$ экстремальны, то при $A = A_0$ и любом $B > B_0$ экстремальны они и только они.

В силу (4) функционал J можно представить как интегральный функционал

$$J = \int_0^{+\infty} \left(-4Ax_1e^{-t}\cos u + 4Bx_2e^{-t}\sin u - 2e^{-2t}\cos 2u\right) dt. \tag{5}$$

Если задано некоторое управление $u(t) = u_0(t)$, то систему (4) можно проинтегрировать и найти значения переменных в точке $t = +\infty$:

$$\Re e\, a_2 = x_1(+\infty) = -2\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos u_0(t)\, dt, \tag{6}$$

$$\Im m\, a_2 = x_2(+\infty) = \quad 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin u_0(t)\, dt, \tag{7}$$

$$\Re e\, a_3 = x_3(+\infty) = x_1^2(+\infty) - x_2^2(+\infty) - 2\int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos 2u_0(t)\, dt. \tag{8}$$

Перепишем фукционал (5) в следующей форме:

$$J = Ax_1^2(+\infty) + Bx_2^2(+\infty) - 2\int_0^{+\infty} e^{-2t}\cos 2u_0(t)\, dt. \tag{9}$$

Согласно Замечаниям 1 и 2, все экстремальные функции f для функционала J представимы в виде (3) через интегралы $w(z,t)$ уравнения (2) с кусочно-непрерывным управлением $u(t)$.

Рассмотрим задачу о $\max J(a_2, a_3)$ как задачу оптимального управления для фазовой системы (4) и целевого функционала (5).

Следуя оптимизационной схеме [3], запишем гамильтониан H в виде

$$\begin{aligned} H(t,x,\psi,u) = -4Ax_1e^{-t}\cos u + 4Bx_2e^{-t}\sin u - 2e^{-2t}\cos 2u - \\ -2\psi_1e^{-t}\cos u + 2\psi_2e^{-t}\sin u - \\ -\psi_3\left(4e^{-t}(x_1\cos u + x_2\sin u) + 2e^{-2t}\cos 2u\right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, а сопряжённый вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ удовлетворяет сопряжённой системе и условиям трансверсальности

$$\begin{cases} \dot\psi_1 &= -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \psi_1(+\infty) = 0, \\ \dot\psi_2 &= -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad \psi_2(+\infty) = 0, \\ \dot\psi_3 &= -\frac{\partial H}{\partial x_3}, \quad \psi_3(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Благодаря тому что $\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0$, решения сопряжённой системы (11) можно выразить через интегралы $x_1(t)$ и $x_2(t)$ фазовой системы (4)

$$\begin{cases} \psi_1(t) &= k_1 - 2Ax_1(t), \\ \psi_2(t) &= k_2 - 2Bx_2(t), \\ \psi_3(t) &= 0, \end{cases} \quad (12)$$

где $k_1 = \psi_1(0)$, $k_2 = \psi_2(0)$ — произвольные постоянные. Условия трансверсальности при этом приобретут следующий вид:

$$k_1 = 2Ax_1(+\infty), \quad (13)$$

$$k_2 = 2Bx_2(+\infty). \quad (14)$$

Подставляя (12) в (10), получим следующее выражение для гамильтониана:

$$H(t,u,k_1,k_2) = 2\left(-e^{-2t}\cos 2u - k_1e^{-t}\cos u + k_2e^{-t}\sin u\right). \quad (15)$$

Таким образом, применительно к данной задаче теорема Понтрягина о необходимых условиях оптимальности управления для неавтономных систем [3] может быть сформулирована в следующем виде.

Теорема 2 [3]. *Для оптимальности управления $u(t)$ необходимо, чтобы для всех $t \in [0; +\infty)$*

$$H(t,u(t),k_1,k_2) = \max_{u\in\mathbb{R}}(t,u,k_1,k_2), \quad (16)$$

где k_1, k_2 определяются условиями трансверсальности (13), (14).

Если (13), (14), (16) имеют место, то будем говорить, что *управление* $u(t)$ *соответствует паре* (k_1, k_2).

2. Основные леммы

Лемма 1. *Пусть управление* $u_0 : [0; +\infty) \to [0; 2\pi)$ *и числа* k_1, k_2 *удовлетворяют условию* (16). *Если* $k_1 k_2 \neq 0$, *то*

(а) для каждого $t \in [0; +\infty)$

$$\begin{cases} \operatorname{sign}\cos u_0(t) &= -\operatorname{sign} k_1 \\ \operatorname{sign}\sin u_0(t) &= \quad \operatorname{sign} k_2 \end{cases}; \tag{17}$$

(б) $u_0(t)$ *непрерывно дифференцируемо всюду на* $[0; +\infty)$, *и его производная* $u_0'(t)$ *ограничена;*

(в) управление, соответствующее паре (k_1, k_2), *единственно.*

Доказательство. Докажем сначала пункт (а) (от противного). Пусть (17) не выполняется в некоторой точке t^*. Определим число u^* равенствами

$$\begin{cases} \cos u^* &= -\operatorname{sign} k_1 \cdot |\cos u_0(t^*)|, \\ \sin u^* &= \quad \operatorname{sign} k_2 \cdot |\sin u_0(t^*)|. \end{cases}$$

Заметим, что $\sin u_0(t^*) \cdot \cos u_0(t^*) \neq 0$, так как

$$\frac{\partial H}{\partial u} \neq 0,$$

если $\sin 2u = 0$ и $k_1 k_2 \neq 0$. Поэтому $H(t^*, u_0(t^*)) < H(t^*, u^*)$, что противоречит условию (16).

Теперь докажем условие (в), которое следует из того, что на интервале $((1 - \operatorname{sign} k_2)\pi/2; (3 - \operatorname{sign} k_2)\pi/2)$ гамильтониан как функция u имеет не более одного экстремума. Представим его следующим образом:

$$H = 2\left(-2b^2 + e^{-2t} - k_1 b + |k_2|\sqrt{e^{-2t} - b^2}\right) = 2R(t, b),$$

где $b = e^{-t}\cos u$.

Необходимым условием экстремума является равенство

$$\frac{\partial R}{\partial b} = -4b - k_1 - |k_2|\frac{b}{\sqrt{e^{-2t} - b^2}} = 0,$$

которое выполняется не более чем в одной точке, так как

$$\frac{\partial^2 R}{\partial b^2} = -4 - |k_2| \frac{\sqrt{e^{-2t} - b^2} + b^2/\sqrt{e^{-2t} - b^2}}{e^{-2t} - b^2} < 0$$

при $b \in (-e^{-t}; e^{-t})$.

Таким образом, любая функция $u : [0; +\infty) \to [0; 2\pi)$, удовлетворяющая равенствам

$$\begin{cases} \operatorname{sign} \cos u(t) &= -\operatorname{sign} k_1, \\ \operatorname{sign} \sin u(t) &= \quad \operatorname{sign} k_2, \end{cases} \tag{18}$$

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{u=u(t)} = 0, \tag{19}$$

совпадает с $u_0(t)$. Это завершает доказательство (в).

Докажем теперь (б). Возьмём произвольное $t_0 \in [0; +\infty)$. Равенство (19) равносильно тому, что

$$e^{-t} = -\frac{k_1 \sin u + k_2 \cos u}{2 \sin 2u} = F(u). \tag{20}$$

Функция $F(u)$ непрерывно дифференцируема, и для её производной в точке $\tilde{u} = u_0(t_0)$ справедливо следующее соотношение:

$$\left. \frac{dF}{du} \right|_{u=\tilde{u}} = \frac{1}{4} \left(\frac{k_2 \cos \tilde{u}}{\sin^2 \tilde{u}} - \frac{k_1 \sin \tilde{u}}{\cos^2 \tilde{u}} \right) \neq 0, \tag{21}$$

в соответствии с (а).

Поэтому $F(u)$ обратима в некоторой окрестности $\tilde{u}$, так что F^{-1} принимает в точке e^{-t_0} значение $\tilde{u}$ и непрерывно дифференцируема в её окрестности. По построению, $u = F^{-1}(e^{-t})$ удовлетворяет вблизи t_0 условиям (18) и (19), а, следовательно, совпадает там с $u_0(t)$.

Таким образом, управление $u_0(t)$ непрерывно дифференцируемо. Покажем, что его производная $u_0'(t)$ ограничена. Действительно, в силу (21)

$$|u_0'(t)| = 4e^{-t} \frac{\sin^2 u_0(t) \cos^2 u_0(t)}{|k_2 \cos^3 u_0(t)| + |k_1 \sin^3 u_0(t)|} < \frac{4\sqrt{2}}{\min\{|k_1|, |k_2|\}}.$$

З а м е ч а н и е 7. Нетрудно видеть, что если управление $u_0(t)$ соответствует паре (k_1, k_2), $k_1 k_2 \neq 0$, то управления $u_1(t) = \pi - u_0(t)$, $u_2 = -u_0(t)$ и $u_3 = \pi + u_0(t)$ соответствуют парам

$(-k_1, k_2)$, $(k_1, -k_2)$ и $(-k_1, -k_2)$, соответственно, и доставляют целевому функционалу (5) такое же значение, как и $u_0(t)$.

Кроме того, из условий трансверсальности (13), (14) следует, что $x_1(+\infty) \neq 0$ и $x_2(+\infty) \neq 0$. В силу Замечания 5 это означает, что функции $h_n(z)$, $n = 0, 1, 2, 3$, порождаемые управлениями $u_n(t)$, попарно различны.

Следствие 2. *Если при $A \leq 0$ или $B \leq 0$ управление $u_0(t)$ соответствует паре (k_1, k_2), то $k_1 k_2 = 0$.*

Доказательство (от противного). Пусть $k_1 k_2 \neq 0$. Тогда, в соответствии с пунктом (а) Леммы 1 и равенствами (6) и (7), $\operatorname{sign} x_1(+\infty) = \operatorname{sign} k_1$ и $\operatorname{sign} x_2(+\infty) = \operatorname{sign} k_2$. Но это противоречит условиям трансверсальности (13), (14).

Лемма 2. *Если при $B \leq 0$ управление $u_0(t)$ соответствует паре (k_1, k_2), то $k_2 = 0$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда по Следствию 2 $k_1 = 0$ и гамильтониан

$$H = 2\left(2e^{-2t}\sin^2 u - e^{-2t} + k_2 e^{-t}\sin u\right) \tag{22}$$

принимает максимальное значение при $\sin u = \operatorname{sign} k_2$. Поэтому $\operatorname{sign} x_2(+\infty) = \operatorname{sign} k_2$, что противоречит условию трансверсальности (14).

Следствие 3. *При $B < 0$ для оптимальности управления $u_0(t)$ необходимо, чтобы*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\sin u_0(t)\,dt = 0. \tag{23}$$

Доказательство. Утверждение следует из равенства (7) и условия трансверсальности (14).

Лемма 3. *Если при $B \leq 0$ управление $u_0(t)$ соответствует паре (k_1, k_2) и $k_1 \neq 0$, то $\forall\, t \in [0; +\infty)$ $\operatorname{sign}\cos u_0(t) = -\operatorname{sign} k_1$.*

Доказательство. В соответствии со Следствием 2, $k_2 = 0$ и гамильтониан равен

$$H = 2\left(-2e^{-2t}\cos^2 u + e^{-2t} - k_1 e^{-t}\cos u\right). \tag{24}$$

Поэтому вывод леммы является следствием условия (16).

Лемма 4. *При $A \le 0$ и $B < 0$ управление $u_0(t)$ оптимально тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(а) $\forall\ t \in [0; +\infty)$ $\cos u_0(t) = 0$;

(б) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \sin u_0(t)\, dt = 0.$

Доказательство. Пусть управление $u_0(t)$ оптимально. Пункт (б) повторяет вывод Следствия 3, поэтому докажем только (а).

По Теореме 2 существует пара (k_1, k_2), соответствующая управлению $u_0(t)$. Заметим, что $k_2 = 0$ в силу Леммы 2, и $k_1 = 0$, так как в противном случае выполняются условия Леммы 3, вывод которой, в силу равенства (6), противоречит условию трансверсальности (13). Поэтому $= 2e^{-2t}(1 - 2\cos^2 u)$ и утверждение пункта (а) следует из (16).

Таким образом, условия (а) и (б) являются необходимыми. Достаточность же следует из того, что все управления, удовлетворяющие им, доставляют целевому функционалу (5) одно и то же значение.

Лемма 5. *Если при некоторых $A \in \mathbb{R}$ и $B \le 0$ управление $u_0(t)$ соответствует паре (k_1, k_2) и $0 < |k_1| < 4$, то $A \in (0\,;1)$ и для всех $t \in [0; +\infty)$ выполняется равенство*

$$\cos u_0(t) = \begin{cases} s \cdot e^{t - \frac{1-A}{A}}, & \text{если } t \le \frac{1-A}{A}, \\ s, & \text{если } t \ge \frac{1-A}{A}, \end{cases} \tag{25}$$

где $s \equiv 1$ или $s \equiv -1$.

Доказательство. По Лемме 2, $k_2 = 0$. В силу того, что $0 < |k_1| < 4$, гамильтониан

$$= 2(-2e^{-2t}\cos^2 u + e^{-2t} - k_1 e^{-t} \cos u)$$

имеет максимум только при

$$\cos u = \begin{cases} -e^t \cdot k_1/4, & \text{если } e^{-t} \ge |k_1|/4, \\ -\operatorname{sign} k_1, & \text{если } e^{-t} \le |k_1|/4. \end{cases} \tag{26}$$

Подставляя (26) в равенство (6), находим из условия трансверсальности (13), что $|k_1| = 4e^{\frac{A-1}{A}}$, с учётом чего получаем (25) из (26). Кроме того, по условию, $|k_1| < 4$, поэтому $e^{\frac{A-1}{A}} < 1$, т. е. $A \in (0\,;1)$.

Следствие 4. *При $0 < A < 1$ и $B \leq 0$ для оптимальности управления $u_0(t)$ необходимо, чтобы оно удовлетворяло условию (25).*

Доказательство. По Теореме 2 существует пара (k_1, k_2), соответствующая управлению $u_0(t)$. В силу равенства (6) и условия трансверсальности (13), $|k_1| < 4$.

Остаётся показать, что $k_1 \neq 0$. Предположим противное. Тогда, в силу условия трансверсальности (13) и формулы (9), максимальное значение J не превышает единицы. Однако, как показывают несложные преобразования, управление, определяемое условиями (23) и (25), доставляет функционалу J значение, равное $1 + 2e^{2(A-1)/A} > 1$.

Лемма 6. *Имеют место следующие утверждения:*

(а) при $0 < A < 1$ и $B = 0$ условие (25) является достаточным для оптимальности управления $u_0(t)$;

(б) при $0 < A < 1$ и $B < 0$ условия (25), (23) являются достаточными для оптимальности управления $u_0(t)$.

Доказательство. Для обоих случаев доказательство аналогично. Ввиду того, что все управления, удовлетворяющие этим условиям, доставляют целевому функционалу (5) одно и то же значение, достаточность этих условий следует из их необходимости.

Лемма 7. *При $A \geq 1$ и $B \leq 0$ для оптимальности управления $u_0(t)$ необходимо, чтобы $\cos u_0(t) \equiv 1$ или $\cos u_0(t) \equiv -1$.*

Доказательство. Из Леммы 5 следует, что $|k_1| \geq 4$ либо $k_1 = 0$. В первом случае гамильтониан

$$H = 2\left(-2e^{-2t}\cos^2 u + e^{-2t} - k_1 e^{-t}\cos u\right)$$

имеет максимум при $\cos u = -\operatorname{sign} k_1$.

Остаётся показать, что $k_1 \neq 0$. Действительно, если $k_1 = 0$, то в силу условия трансверсальности (13) и формулы (9) $J \leq 1$. Однако постоянное управление $u(t) = 0$ доставляет функционалу J значение $4A - 1 > 1$, $A \geq 1$.

Следствие 5. *При $A \geq 1$ и $B \leq 0$ экстремальны функции Кёбе K_0, K_π и только они.*

Доказательство. Утверждение немедленно следует из того, что все управления $u_0(t)$, удовлетворяющие условиям Леммы 7, порождают функции K_0, K_π и только эти функции.

Лемма 8. *Если при $A = A_0$ и $B = B_0$ функция K_θ является экстремальной, то $K_{\theta+\pi}$ тоже экстремальна и имеет место одно из следующих утверждений:*

(а) $A_0 - B_0 < \frac{1}{2}$ *и* $\theta \equiv \pi/2 \pmod{\pi}$;

(б) $A_0 - B_0 > \frac{1}{2}$ *и* $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Доказательство. Утверждение леммы получается при оптимизации функционала J на множестве вращений функции Кёбе.

Лемма 9. *Если управление $u_0(t)$ оптимально при некоторых $A > 0, B > 0$, то для любых $t_1 \geq 0$, $t_2 \geq 0$*

$$\sin u_0(t_1) \sin u_0(t_2) \geq 0, \qquad \cos u_0(t_1) \cos u_0(t_2) \geq 0.$$

Доказательство. От противного. Пусть утверждение леммы ложно. Определим управление

$$u^*(t) = \begin{cases} u_0(t), & \text{если } \cos u_0(t) \geq 0 \text{ и } \sin u_0(t) \geq 0, \\ \pi - u_0(t), & \text{если } \cos u_0(t) \leq 0 \text{ и } \sin u_0(t) \geq 0, \\ \pi + u_0(t), & \text{если } \cos u_0(t) \leq 0 \text{ и } \sin u_0(t) \leq 0, \\ -u_0(t), & \text{если } \cos u_0(t) \geq 0 \text{ и } \sin u_0(t) \leq 0. \end{cases} \tag{27}$$

Так как управление может иметь разрывы только первого рода, из формул (6), (7) и (9) следует, что управление u^* доставляет целевому функционалу большее значение, чем $u_0(t)$. Противоречие доказывает лемму.

Лемма 10. *Пусть управление $u_0(t)$ оптимально при некоторых $A > 0, B > 0$ и соответствует паре (k_1, k_2). Тогда оно постоянно в том и только в том случае, когда*

$$k_1 k_2 = 0. \tag{28}$$

Доказательство. Пусть u_0 постоянно. Тогда оно порождает одно из вращений функции Кёбе. С учётом Леммы 8 получаем равенство $x_1(+\infty)x_2(+\infty) = 0$, которое, вследствие условий трансверсальности (13), (14), влечёт (28).

Пусть теперь выполняется равенство (28). Тогда из условий трансверсальности (13), (14), получаем $x_1(+\infty)x_2(+\infty) = 0$. Применяя формулы (6), (7) и Лемму 9, получаем требуемое.

Лемма 11. *Если при $A = A_0 > 0$ и $B = B_0 > 0$ управлению $u_0(t)$ соответствует пара (k_1, k_2), $k_1 k_2 \neq 0$, то существуют такие $\xi, \varphi \in (0; \pi/2)$, что $\xi > \varphi$ и имеют место следующие равенства:*

$$A_0 = \frac{1}{1 - \log\frac{\cos\xi}{\cos\varphi} + \operatorname{tg}\varphi\,(\varphi - \xi - \operatorname{ctg}\xi)}; \tag{29}$$

$$B_0 = \frac{1}{\log\frac{\sin\xi}{\sin\varphi} - 1 + \operatorname{ctg}\varphi\,(\varphi - \xi + \operatorname{tg}\xi)}; \tag{30}$$

$$|k_1| = 2\frac{\sin 2\xi}{\sin(\xi - \varphi)}\cos\varphi; \tag{31}$$

$$|k_2| = 2\frac{\sin 2\xi}{\sin(\xi - \varphi)}\sin\varphi; \tag{32}$$

$$J_{u_0} = \operatorname{ctg}(\xi - \varphi)\sin 2\xi + \frac{\sin(\xi + \varphi)}{\sin(\xi - \varphi)}, \tag{33}$$

где J_{u_0} — значение, доставляемое целевому функционалу (5) управлением $u_0(t)$.

Доказательство. В силу Замечания 7 и пункта (a) Леммы 1 можно, не умаляя общности, считать, что для всех $t \in [0; +\infty)$ $u_0(t) \in (0; \pi/2)$.

Обозначим $\rho = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$. Положим $\xi = u_0(0)$, $\varphi = u_0(+\infty)$. Из условия (16) следует, что

$$\begin{cases} \cos\varphi = -k_1/\rho, \\ \sin\varphi = k_2/\rho, \end{cases} \tag{34}$$

$$2e^{-t}\sin 2u_0(t) = \rho\sin(u_0(t) - \varphi), \quad t \geq 0. \tag{35}$$

Из (35) следует, что $\xi > \varphi$ и

$$e^{-t} = \frac{\rho}{4}\left(\frac{\cos\varphi}{\cos u_0(t)} - \frac{\sin\varphi}{\sin u_0(t)}\right). \tag{36}$$

В силу (34) условия трансверсальности можно записать в следующем виде:

$$A = -\frac{\rho\cos\varphi}{2x_1(+\infty)}, \tag{37}$$

$$B = \frac{\rho\sin\varphi}{2x_2(+\infty)}. \tag{38}$$

Подставляя эти равенства в формулу (9), получаем

$$J_{u_0} = \frac{\rho}{2}(x_2(+\infty)\sin\varphi - x_1(+\infty)\cos\varphi) - 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-2t}\cos 2u_0(t)\,dt. \quad (39)$$

По Лемме 1 $u_0(t)$ непрерывно дифференцируемо, поэтому, используя (36), можно произвести замену переменной интегрирования в формулах (6), (7) и (39). Таким образом, получаем

$$x_1(+\infty) = -\frac{\rho}{2}\cos\varphi\left(1 - \log\frac{\cos\xi}{\cos\varphi} + \operatorname{tg}\varphi\,(\varphi - \xi - \operatorname{ctg}\xi)\right); \quad (40)$$

$$x_2(+\infty) = \frac{\rho}{2}\sin\varphi\left(\log\frac{\sin\xi}{\sin\varphi} - 1 + \operatorname{ctg}\varphi\,(\varphi - \xi + \operatorname{tg}\xi)\right); \quad (41)$$

$$J_{u_0} = \frac{\rho^2}{8}\left(-\sin 2\varphi\,\operatorname{ctg} 2\xi + \cos 2\varphi + 2\frac{\sin(\xi-\varphi)\sin(\xi+\varphi)}{\sin^2 2\xi}\right). \quad (42)$$

Подставляя (40), (41) в условия трансверсальности (37), (38), соответственно, получаем формулы (29) и (30).

Применяя (35) для $t = 0$, находим выражение для ρ

$$\rho = 2\frac{\sin 2\xi}{\sin(\xi - \varphi)},$$

при помощи которого получаем из (34) и (42) формулы (31), (32) и (33).

Замечание 8. Из доказательства Леммы 11 следует, что для любых $\xi, \varphi \in (0\,;\pi/2)$, $\xi > \varphi$, существует управление $u_{(\varphi,\xi)}(t)$, которое при $A = A_0$ и $B = B_0$ из равенств (29) и (30) доставляет целевому функционалу значение (33).

Лемма 12. *Образом треугольника* $\Omega = \{(\varphi,\xi) : 0 < \varphi < \xi < \pi/2\}$ *при отображении* $\eta : (\varphi,\xi) \mapsto (A_0, B_0)$, *заданном формулами (29), (30), является область* $\Psi \subset D = \{(A,B) : A > 0, B > 0\}$, *ограниченная отрезком* $l = \{(A,B) : A \in [0;1], B = 0\}$ *и графиками функций*

$$B = \frac{1}{\log\frac{A}{A-1}}, \quad A \in (1;+\infty), \quad (43)$$

$$B = \frac{1}{e^{\frac{1}{A}} - 1}, \quad A \in (0;+\infty). \quad (44)$$

З а м е ч а н и е 9. Графики функций (43) и (44) имеют общую асимптоту $B = A - \frac{1}{2}$ и лежат по разные стороны от неё. Предпошлём доказательству следующие леммы.

Лемма 13. *Справедливо включение* $\Psi \subset D$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Перепишем формулы (29), (30) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_0} &= -\log\frac{\cos\xi}{\cos\varphi} + \operatorname{tg}\varphi\,\left((\varphi + \operatorname{ctg}\varphi) - (\xi + \operatorname{ctg}\xi)\right), \\ \frac{1}{B_0} &= \quad \log\frac{\sin\xi}{\sin\varphi} + \operatorname{ctg}\varphi\,\left((\varphi - \operatorname{tg}\varphi) - (\xi - \operatorname{tg}\xi)\right). \end{aligned}$$

Функции $x + \operatorname{ctg} x$, $x - \operatorname{tg} x$ строго убывают на $(0;\pi/2)$, поэтому при $\varphi, \xi \in (0;\pi/2)$ и $\varphi < \xi$, в соответствии с вышеприведёнными равенствами, $A_0^{-1} > 0, B_0^{-1} > 0$.

Лемма 14. *Отображение* $\eta : \Omega \to D$ *является топологическим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что отображение η непрерывно. Докажем инъективность η. Оно непрерывно дифференцируемо, причём

$$\frac{\partial(1/A_0)}{\partial\varphi} = -\frac{\cos\xi + (\xi - \varphi)\sin\xi}{\cos^2\!\varphi\sin\xi} < 0; \tag{45}$$

$$\frac{\partial(1/A_0)}{\partial\xi} = \frac{\sin^3\!\xi\cos\varphi + \cos^3\!\xi\sin\varphi}{\sin^2\!\xi\cos\xi\cos\varphi} > 0; \tag{46}$$

$$\frac{\partial(1/B_0)}{\partial\varphi} = -\frac{\sin\xi - (\xi - \varphi)\cos\xi}{\sin^2\!\varphi\cos\xi} < 0; \tag{47}$$

$$\frac{\partial(1/B_0)}{\partial\xi} = \frac{\sin^3\!\xi\cos\varphi + \cos^3\!\xi\sin\varphi}{\cos^2\!\xi\sin\xi\sin\varphi} > 0. \tag{48}$$

Пусть (A_1, B_1) — произвольная точка области Ψ. Фиксируем произвольное $\varphi = \varphi_1 \in (0;\pi/2)$ и рассмотрим уравнения

$$A_0(\varphi_1, \xi) = A_1, \tag{49}$$

$$B_0(\varphi_1, \xi) = B_1. \tag{50}$$

Заметим, что, в силу Леммы 13 $A_1 > 0$, $B_1 > 0$ и

$$\lim_{\xi\to\frac{\pi}{2}-0} A_0(\varphi_1, \xi) = 0, \qquad \lim_{\xi\to\varphi_1+0} A_0(\varphi_1, \xi) = +\infty,$$

$$\lim_{\xi\to\frac{\pi}{2}-0} B_0(\varphi_1,\xi)=0, \qquad \lim_{\xi\to\varphi_1+0} B_0(\varphi_1,\xi)=+\infty.$$

Таким образом, из (45)–(48), следует, что решения $\xi=\xi_1(\varphi_1)$, $\xi=\xi_2(\varphi_1)$ уравнений (49) и (50) существуют и единственны, причём функции $\xi_1(\varphi),\xi_2(\varphi)$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial(1/A_0)}{\partial\varphi}d\varphi-\frac{\partial(1/A_0)}{\partial\xi}d\xi_1=0,$$

$$\frac{\partial(1/B_0)}{\partial\varphi}d\varphi-\frac{\partial(1/B_0)}{\partial\xi}d\xi_2=0,$$

которые можно переписать в виде

$$\frac{d\xi_1}{d\varphi}=-\frac{\sin\xi_1\cos\xi_1}{\sin^3\xi_1\cos\varphi+\cos^3\xi_1\sin\varphi}\cdot\frac{\cos\xi_1+(\xi_1-\varphi)\sin\xi_1}{\cos\varphi}; \tag{51}$$

$$\frac{d\xi_2}{d\varphi}=-\frac{\sin\xi_2\cos\xi_2}{\sin^3\xi_2\cos\varphi+\cos^3\xi_2\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\xi_2+(\xi_2-\varphi)\cos\xi_2}{\sin\varphi}. \tag{52}$$

Из уравнений (51), (52) следует, что в точках φ, для которых $\xi_1(\varphi)=\xi_2(\varphi)=\xi$, производная разности $\xi_1-\xi_2$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{d(\xi_1-\xi_2)}{d\varphi}=\frac{\sin(\xi-\varphi)-(\xi-\varphi)\cos(\xi-\varphi)}{\sin^3\xi\cos\varphi+\cos^3\xi\sin\varphi}\cdot\frac{\sin\xi\cos\xi}{\sin\varphi\cos\varphi}>0. \tag{53}$$

Поэтому таких точек не может быть более одной. Это доказывает взаимную однозначность отображения $\eta:\Omega\to D$.

Остаётся показать, что оно открыто. Для этого достаточно проверить, что его якобиан всюду отличен от нуля. Используя (45)–(48), получаем

$$\det\begin{Vmatrix}\frac{\partial A_0}{\partial\varphi} & \frac{\partial A_0}{\partial\xi}\\ \frac{\partial B_0}{\partial\varphi} & \frac{\partial B_0}{\partial\xi}\end{Vmatrix}=A_0^2B_0^2\det\begin{Vmatrix}\frac{\partial(1/A_0)}{\partial\varphi} & \frac{\partial(1/A_0)}{\partial\xi}\\ \frac{\partial(1/B_0)}{\partial\varphi} & \frac{\partial(1/B_0)}{\partial\xi}\end{Vmatrix}=(A_0B_0)^2\times$$

$$\times\frac{\sin^3\xi\cos\varphi+\cos^3\xi\sin\varphi}{(\sin\xi\sin\varphi\cos\xi\cos\varphi)^2}\Big(\sin(\xi-\varphi)-(\xi-\varphi)\cos(\xi-\varphi)\Big)>0,$$

$$(\varphi,\xi)\in\Omega.$$

Лемма 15. *Пусть $\{a_n(\varphi_n,\xi_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — сходящаяся последовательность точек области Ω. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) если $\lim a_n \in \{(\varphi,\xi) : 0 \le \varphi < \pi/2, \xi = \pi/2\}$, *то существует* $\lim \eta(a_n) = (0\,,0)$;

(б) если $\lim a_n = (0,\xi_0)$, *где* $\xi_0 \in (0;\pi/2)$, *то существует* $\lim \eta(a_n) = (1/(1-\log\cos\xi_0)\,,0)$;

(в) если $\lim a_n \in \{(\varphi,\xi) : 0 < \varphi < \pi/2),\ \xi = \varphi\}$, *то последовательность* $\eta(a_n)$ *сходится к бесконечности;*

(г) если $\lim a_n = (0\,,0)$ *и существует* $\lim \xi_n/\varphi_n = M \in [1;+\infty]$, *то*

$$\lim \eta(a_n) = \begin{cases} \infty, & \text{если } M = 1, \\ (M/(M-1)\,,\log^{-1}M), & \text{если } M \in (1\,;+\infty), \\ (1\,,0), & \text{если } M = +\infty, \end{cases}$$

(д) если $\lim a_n = (\pi/2\,,\pi/2)$ *и существует* $\lim \dfrac{\pi/2-\xi_n}{\pi/2-\varphi_n} = m \in [0;1]$, *то*

$$\lim \eta(a_n) = \begin{cases} (0\,,0), & \text{если } m = 0, \\ (-\log^{-1}m\,, m/(1-m)), & \text{если } m \in (0\,;1), \\ \infty, & \text{если } m = 1. \end{cases}$$

Доказательство сводится к элементарным вычислениям.

Доказательство Леммы 12. Для любой точки $x \in \partial\Psi$ существует последовательность $\{x_n \in \Psi\}_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к ней. Рассмотрим последовательность $b_n = \eta^{-1}(x_n)$. Она не имеет в области Ω предельных точек, так как, по Лемме 14, отображение $\eta : \Omega \to D$ открыто. Поэтому последовательность b_n имеет подпоследовательность $a_k = b_{n_k}$ одного из типов, о которых идёт речь в Лемме 15.

Таким образом,

$$\partial\Psi \subset \Upsilon = l \cup \left\{(A,B) : A \in (1;+\infty), B = \log^{-1}\tfrac{A}{A-1}\right\} \cup \\ \cup \left\{(A,B) : A \in (0;+\infty), B = 1/(e^{1/A}-1)\right\}.$$

В соответствии с Леммами 13 и 14 и Замечанием 9, включение $\partial\Psi \subset \Upsilon$ может быть реализовано только равенством, что и доказывает лемму.

3. Доказательство Теоремы 1 и следствия из неё

Доказательство пункта (а) Теоремы 1. В соответствии с Леммой 4, при $A \le 0$, $B < 0$ экстремальные функции порождаются двумя управлениями $u_1(t)$ и $u_2(t)$, $u_2(t) \equiv u_1(t) + \pi (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, которые доставляют функционалу (5) значение, равное единице. Такое же значение достигает функционал J для функции $f_0(z) = z/(1-z^2)$, из чего следует, что $f_0(z)$ порождается одним из этих управлений. С другой стороны, f_0 нечётна, поэтому, вследствие Замечания 5, и второе управление порождает ту же функцию.

Из-за непрерывности функционала (5) по параметрам A и B, единица является его максимальным значением и при $A \le 0$, $B = 0$. Поэтому из формулы (9) следует, что оптимальными являются управления $u_0(t)$, удовлетворяющие тождеству $\cos u_0(t) \equiv 0$, и только они. Таким образом, все экстремальные функции порождаются управлениями $u_{r,s}$, для которых

$$\sin u_{r,s}(t) = \begin{cases} s, & \text{если } t < \log(2/(1-r)), \\ -s, & \text{если } t \ge \log(2/(1-r)), \end{cases}$$

где $r \in [-1;1]$, $s \in \{-1\,,1\}$.

Нетрудно проверить, что $u_{r,1}$ порождает функцию $f_r(z) = z/(1-z^2+2irz)$, которая в силу Замечания 5 порождается также и управлением $u_{-r,-1}$.

Следствие 6. *При $A \le 0, B > 0$ экстремальными являются функции Кёбе $K_{\pi/2}, K_{-\pi/2}$ и только они.*

Доказательство. Утверждение следует из пункта (г) Замечания 6.

Доказательство пункта (в) Теоремы 1. Пусть $0 < A < 1$, $B \le 0$. Лемма 6 и Следствия 3 и 4 дают, в совокупности, необходимые и достаточные условия оптимальности управления. Поэтому, воспользовавшись формулами (6), (7) и (9), нетрудно убедиться, что максимальное значение функционала (5) равно $1 + 2e^{2(A-1)/A}$.

Кроме того, если $B \ne 0$, то при фиксированном $0 < A < 1$ существует ровно четыре оптимальных управления $u_n(t)$, $n = 0, 1, 2, 3$, причём они связаны между собой следующим образом:

$$u_1 \equiv -u_0,\ u_2 \equiv \pi + u_0,\ u_3 \equiv \pi - u_0 \pmod{2\pi}.$$

В силу того, что $u_n(t)$ разрывны, экстремальные функции $g_n(z)$, порождаемые ими, отображают E на плоскость с двумя разрезами.

Докажем, что коэффициенты этих функций действительны. В силу Замечания 5это равносильно тому, что $g_0(z) \equiv g_1(z)$. Покажем истинность последнего. Не умаляя общности, будем считать, что $\cos u_0(0) > 0$ и $\sin u_0(0) > 0$. Рассмотрим множество управлений $u(t)$, имеющих два разрыва и удовлетворяющих необходимым и достаточным условиям оптимальности, а также неравенствам $\cos u(0) > 0$, $\sin u(0) < 0$. Каждое такое управление взаимно однозначно задаётся числом $r \in (0;1)$ посредством следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \sin u_r(t) &< 0, \qquad && t < rt^*, \\ \sin u_r(t) &> 0, \qquad && rt^* < t < t^*, \end{aligned}$$

где t^* — точка разрыва $u_0(t)$.

Продолжим семейство u_r в концах интервала $(0;1)$, считая что $r = 0$ соответствует управление $u_0(t)$, а $r = 1$ — управление $u_1(t)$.

Из-за условия на знак $\cos u_r(0)$ множество функций $g_r(z)$, порождаемых управлениями $u_r(t)$, состоит ровно из двух функций $g_0(z)$ и $g_r(z)$. С другой стороны, $g_r(z)$ представима в виде

$$g_r(z) = e^{(1-A)/A} K_\pi(w_r(z, (1-A)/A)),$$

где $w_r(z,t)$ — решение уравнения Лёвнера (2) с управлением $u = u_r(t)$. Из этого следует [1], что $g_r(z)$ непрерывна по r (в смысле равномерной сходимости внутри E). Поэтому $g_0(z) = g_1(z)$.

Таким образом, среди функций $g_n(z)$, $n = 0, 1, 2, 3$, существует не более двух различных. С другой стороны, $g_0(z)$ и $g_2(z)$ не совпадают, так как $g_0''(0) \neq 0$, т. е. g_0 не является чётной.

Если же $B = 0$, то в силу необходимых и достаточных условий оптимальности для каждого фиксированного $A \in (0;1)$ и $\zeta \in [0;\zeta_0]$, где

$$\zeta_0 = 2\int\limits_0^{(1-A)/A} e^{-t}\sqrt{1 - e^{2(t-(1-A)/A)}}\, dt,$$

существует четыре оптимальных управления $u_{n,\zeta}$, $n = 0,1,2,3$, придающих $|x_2(+\infty)|$ значение, равное ζ. При этом множество всех оптимальных управлений ими исчерпывается, так как для любого оптимального управления $|x_2(+\infty)| \le \zeta_0$.

Нетрудно видеть, что $u_{n,\zeta}$ непрерывно тогда и только тогда, когда $\zeta = \zeta_0$. В силу Замечания 3 это завершает доказательство.

Доказательство пунктов (б) и (г) Теоремы 1. Для случая $A \le 0$ или $B \le 0$ (б) и (г) уже доказаны в Следствиях 6 и 5. Поэтому будем считать, что $A > 0$, $B > 0$.

Вследствие Лемм 11, 12 и 10, оптимальное управление при $B > 0$ и $A \notin \left(\log^{-1}\frac{B+1}{B}; e^{\frac{1}{B}}/(e^{\frac{1}{B}} - 1)\right)$ постоянно. Таким образом, Лемма 8 доказывает утверждения пунктов (б) и (г).

Доказательство пункта (д) Теоремы 1. Заметим, что в силу Леммы 12 $D_6 = \Psi$.

Сначала покажем, что функции Кёбе при $(A,B) \in \Psi$ не экстремальны. Вследствие Леммы 8 и Замечания 9, достаточно показать, что при $(A,B) \in \Psi \cap \left\{(A,B) : A < B - \frac{1}{2}\right\}$ не являются экстремальными функции $K_{\pi/2}$ и $K_{-\pi/2}$, а при $(A,B) \in \Psi \cap \left\{(A,B) : A > B - \frac{1}{2}\right\}$ — функции K_0 и K_π.

Рассмотрим сначала первый случай. Зафиксируем произвольные $(A^*, B^*) \in \Psi \cap \left\{(A,B) : A < B - \frac{1}{2}\right\}$. Как это следует из Замечания 9и пункта (д) Леммы 15, существуют такие $l > 0, \varepsilon > 0$ и $m \in (0\,;1)$, что

$$A_1 = A^* - \varepsilon + l = -\frac{1}{\log m}; \tag{54}$$

$$B_1 = B^* + l = \frac{m}{1-m}; \tag{55}$$

$$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2} - 0} \eta(\varphi, \frac{\pi}{2} - m(\frac{\pi}{2} - \varphi)) = (A_1, B_1). \tag{56}$$

Пусть $\varphi = \pi/2 - \delta$ и $\xi = \pi/2 - m\delta$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} G(\delta) &= 1/(J_K - 1) - 1/(J_{(\pi/2-\delta, \pi/2 - m\delta)} - 1) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\log\frac{\cos m\delta}{\cos\delta} - 1 + \operatorname{tg}\delta(\operatorname{ctg} m\delta + (m-1)\delta)\right) - \\ &\quad - \frac{\sin(1-m)\delta}{\cos(1-m)\delta\sin 2m\delta + 2\sin m\delta\cos\delta}, \end{aligned} \tag{57}$$

где J_K и $J_{(\varphi,\xi)}$ — значения функционала J, которые доставляют ему $K_{\pi/2}$, $K_{-\pi/2}$ и функция, порождаемая управлением $u_{(\varphi,\xi)}(t)$ (см. Замечание 8), при $A = A_0$, $B = B_0$ из формул (29) и (30).

Преобразования показывают[4], что функция $G(\delta)$ и её производные до четвёртого порядка могут быть продолжены по непрерывности справа в точку $\delta = 0$, причём

$$G(0) = G'(0) = G''(0) = G'''(0) = 0, \text{ а } G^{IV}(0) = \frac{(1-m)^3}{2} > 0.$$

В сочетании с пунктом (б) Замечания 6это означает, что на прямой $B = B^*$ существует множество Ξ точек плоскости параметров, на котором функции $K_{\pi/2}$ и $K_{-\pi/2}$ не экстремальны, и точка $(A_2, B_2) = (A^* - \varepsilon, B^*)$ является для Ξ предельной. Поэтому интервал $I = \left\{(A,B) : -\log^{-1}\frac{B^*+1}{B^*} < A < A^*, B = B^*\right\}$ имеет непустое пересечение с Ξ. В одном из концов интервала I функции

[4]Ввиду громоздкости преобразований, для вычисления производных и их пределов был использован пакет *Mathematica*.

$K_{\pi/2}$ и $K_{-\pi/2}$ экстремальны. Таким образом, из пункта (а) Замечания 6следует, что на другом конце, т. е. в точке (A^*, B^*), они не являются экстремальными.

Итак, для случая $(A,B) \in \Psi \cap \left\{(A,B) : A < B - \frac{1}{2}\right\}$ доказательство проведено. Если же $(A,B) \in \Psi \cap \left\{(A,B) : A > B - \frac{1}{2}\right\}$, то оно совершенно аналогично, за исключением того, что вместо пункта (д) Леммы 15 нужно использовать пункт (г) с $M \in (0\,; +\infty)$ и $A_1 = A^* + l - \varepsilon$; $\varphi = \delta$, $\xi = M\delta$,

$$G(\delta) = 1/(J_K + 1) - 1/(J_{(\delta, M\delta)} + 1) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 - \log\frac{\cos M\delta}{\cos\delta} - \operatorname{tg}\delta(\operatorname{ctg} M\delta + (M-1)\delta)\right) -$$
$$- \frac{\sin(M-1)\delta}{\cos(M-1)\delta \sin 2M\delta + 2\sin M\delta\cos\delta}, \tag{58}$$

$$G^{IV} = \frac{(M-1)^3}{2} > 0,$$
$$(A_2, B_2) = (A^* - \varepsilon, B^*),$$
$$I = \left\{(A,B) : A^* < A < e^{1/B^*}/(e^{1/B^*} - 1), B = B^*\right\}.$$

Таким образом, в области Ψ плоскости параметров функции Кёбе не экстремальны, поэтому оптимальные управления не постоянны, и, вследствие Леммы 10, им соответствуют пары (k_1, k_2), $k_1 k_2 \neq 0$. По Лемме 14, для каждой $(A_0, B_0) \in \Psi$ существует единственная пара $(\varphi, \xi) \in \Omega$, удовлетворяющая равенствам (29) и (30). Поэтому из Леммы 11 следует, что при $(A,B) \in \Psi$ пара (k_1, k_2), для которой существует соответствующее оптимальное управление, единственна с точностью до знаков k_1 и k_2. Поэтому в силу Замечания 7и пункта (в) Леммы 1 есть ровно четыре оптимальных управления, причём они порождают попарно различные функции. Кроме того, эти управления, по пункту (б) Леммы 1, являются гладкими и их производные ограничены. Из этого следует, что экстремальные функции отображают E на плоскость с одним гладким разрезом.

Д о к а з а т е л ь с т в о Следствия 1. Семейству функционалов J_c на плоскости (A,B) соответствует прямая $l_1 : A = 1$. Нетрудно видеть, что $l_1 \subset \left(\overline{D}_4 \cup D_6 \cup \left(\overline{D}_2 \setminus \overline{D}_1\right)\right)$, причём

$$l_1 \cap \overline{D}_4 = \{(A,B) \in l_1 : B \leq 0\},$$

$$l_1 \cap D_6 = \{(A,B) \in l_1 : 0 < B < 1/(e-1)\},$$

$$l_1 \cap \left(\overline{D}_2 \setminus \overline{D}_1\right) = \{(A, B) \in l_1 : B \geq 1/(e-1)\}.$$

Возвращаясь к параметру c по формуле $c = (B+1)/2$, получаем утверждения гипотез (а) и (б) как следствия пунктов (б) и (д) Теоремы 1, соответственно.

Семейству функционалов J_p на плоскости (A, B) соответствует прямая $l_2 : B = 1/3$. Заметим, что $l_2 \subset \left(\overline{D}_5 \cup D_6 \cup \left(\overline{D}_2 \setminus \overline{D}_1\right)\right)$, причём

$$l_2 \cap \overline{D}_5 = \left\{(A, B) \in l_2 : A \geq e^3/(e^3-1)\right\},$$

$$l_2 \cap D_6 = \left\{(A, B) \in l_2 : \log^{-1} 4 < A < e^3/(e^3-1)\right\},$$

$$l_2 \cap \left(\overline{D}_2 \setminus \overline{D}_1\right) = \left\{(A, B) \in l_2 : A \leq \log^{-1} 4\right\}.$$

Возвращаясь к параметру p по формуле $p = (3A-1)/2$, получаем утверждения гипотез (в), (г) и (д) как следствия пунктов (г), (д) и (б) Теоремы 1, соответственно.

Во время подготовки статьи к публикации авторам стало известно, что Грейнеру и Роту [6] удалось в 1999 году доказать гипотезы (в)–(д). Для этого они тоже использовали принцип максимума Понтрягина с условиями трансверсальности применительно к уравнению Лёвнера (2).

Литература

[1] Александров И. А. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций.* – М.: Наука, 1976.

[2] Куфарев П. П. *Одно замечание об интегралах уравнения Лёвнера* // ДАН СССР, 1947, т. 57, в. 7, с. 655–656.

[3] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1976.

[4] Blatter Chc. *Ein Verzerrungssatz für schlichte Functionen* // Comm. Math. Helvet, 1978, v. 53, p. 651–659.

[5] Duren P. L. *Univalent functions.* – Springer-Verlag, 1983.

[6] Greiner R., Roth O. *The sharp form of Blatter's distortion theorem* // Preprint der Bayerishcen Julius-Maximilians-Univ., Würzburg, 1999, 22 p.

[7] Jakubowski Z. J., Zyskowska K. *On an estimate of a functional in the class holomorphic univalent functions* // Math. Boh. 1993, v. 118, №3, 281–296.

[8] Kim S., Minda D. *Two-point distortion theorems for univalens functions* // Pac. J. Math., 1994, v. 163, № 1, 137–157.

[9] Prokhorov D. V. *Reachable set methods in extremal problems for univalent functions.* – Saratov: Saratov Univ., 1993.

[10] Roth O. *Control Theory in H(D)* // Diss. Bayerishcen Julius-Maximilians-Univ., Würzburg, 1998.

Поступила в редакцию 13 июля 1999 г.