DETALJER

8.11 Hastighetsprofil i turbulent strøm

Prandtl: $l = Ky$, $K \approx 0.40$

$\Rightarrow$ utafor ~~grense~~ sub-sjiktet:

$$\tau \approx \tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \rho K^2 y^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

$$du = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\,\frac{dy}{y} = \frac{u_*}{K}\,\frac{dy}{y}$$

$$u = 2.5\, u_* \ln y + C$$

Med konstanten bestemt ved røraksen, $y = r_0 \Rightarrow u = u_{max}$:

$$\frac{u_{max} - u}{u_*} = 2.5 \ln \frac{r_0}{y}$$

Omskrevet:

$$\boxed{u = u_{max} - 2.5 u_* \ln \frac{r_0}{r_0 - r}} = u_{max} - 5.76 u_* \log_{10} \frac{r_0}{r_0 - r}$$

Dette divergerer ved rørveggen, men der forutsettes ikke ligningen å gjelde – det er i det viskøse subsjiktet!

Relater dette til midlere hastighet:

$$VA = Q = \int_A u\, dA = 2\pi \int_0^{r_0} u r\, dr$$

En kjempeforenkling av integrasjonene oppnås ved et lurt variabelskifte eller to, samt delvis integrasjon:

$$VA = 2\pi \left\{ u_{max} \int_0^{r_0} r\, dr - 2.5 u_* \int_0^{r_0} \ln \frac{r_0}{r_0 - r}\, r\, dr \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \tfrac{1}{2} r_0^2 u_{max} + 2.5 u_* r_0^2 \int_0^1 \ln\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \frac{r}{r_0}\, d\left(\frac{r}{r_0}\right) \right\} \qquad \left(t = \frac{r}{r_0}\right)$$

$$= u_{max} \pi r_0^2 + 5 u_* \pi r_0^2 \int_0^1 \ln(1-t)\, t\, dt$$

$$= A \left\{ u_{max} + 5 u_* \int_0^1 (1-s) \ln s\, ds \right\} \qquad (s = 1 - t)$$

$$\int y^N \ln y\, dy = \frac{y^{N+1}}{N+1} \ln y - \frac{y^{N+1}}{(N+1)^2} + C \quad \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 \ln s\, ds &= -1 \\ \int_0^1 s \ln s\, ds &= -\frac{1}{4} \end{aligned} \right\}$$

y-potensen slår ikjel
ln y-divergensen ved $y = 0$

Det gir

$$V = u_{max} - \frac{3}{2} \cdot 2.5 u_*$$

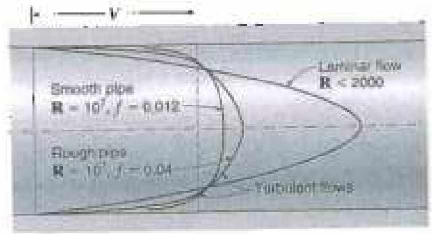
og, siden vi har relasjonen $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = V \sqrt{\frac{f}{8}}$:

$$V = u_{max} - \frac{3.75}{\sqrt{8}} V \sqrt{f}$$

$$= u_{max} - 1.326 V \sqrt{f}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{V}{u_{max}} = \frac{1}{1 + 1.326\sqrt{f}}} \quad \text{Rørfaktoren}$$

Ved gitt V (dvs. gitt Re) betyr det at glatt rør har flatere profil enn ru rør, siden f vil være størst for ru rør:



Ved bestemmelse av α- og β-faktorene fås integralene

$$\int_A u^N dA, \qquad N > 1$$

Integralene kan "lett" beregnes, og gir:

$$\alpha = 1 + 2.7 f$$

$$\beta = 1 + 0.98 f$$