

4.12/4.13 Hastighet, akselerasjon og substansielt derivert

Stoffet i avsnittene 4.12 og 4.13 blir forelest på en litt annen måte enn i læreboka, i *operatornotasjon*, med bruk av ∇ -operatoren (*nabla* eller *del*). Det følgende er en sammenfattet versjon av forelesningsnotatene.

Med enhetsvektorer $\hat{i}$, $\hat{j}$ og $\hat{k}$ langs koordinataksene, er posisjonsvektoren $\mathbf{r}$ fra origo til punktet (x, y, z) i et kartesisk koordinatsystem gitt som

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Lokal hastighetsvektor $\mathbf{u}$ er en funksjon av tids- og romkoordinater:¹

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}(t, \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{u}(t, x, y, z) \\ &= (u, v, w) \\ &= u(t, x, y, z)\hat{i} + v(t, x, y, z)\hat{j} + w(t, x, y, z)\hat{k}\end{aligned}$$

Differensialet av $\mathbf{u}$ blir

$$d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz$$

med de partiellderiverte

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t}\hat{i} + \frac{\partial v}{\partial t}\hat{j} + \frac{\partial w}{\partial t}\hat{k} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial v}{\partial x}\hat{j} + \frac{\partial w}{\partial x}\hat{k} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial w}{\partial y}\hat{k} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial z}\hat{i} + \frac{\partial v}{\partial z}\hat{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\hat{k}\end{aligned}$$

Men nå skal vi la det tilsvarende posisjonsdifferensialet $d\mathbf{r}$ være en differensiell forflytning langs banelinja for et massepunkt i et strømproblem. Da blir ikke dt , dx , dy og dz uavhengige differensialer, siden forflytningsvektoren over tidsintervallet dt er:

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) = \mathbf{u} dt$$

Det vil si:

$$\mathbf{u} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

Anta fortsatt at $d\mathbf{r}$ og $\mathbf{u}$ peker langs banelinja, og finn den tidsderivate av $\mathbf{u}$ ved forflytningen av massepunktet langs banelinja ved hjelp av differensialet av $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} w \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} + v \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u} + w \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{u}\end{aligned}$$

¹Litt slurvet notasjon for korthets skyld! Vi burde strengt tatt forandrer navn på funksjoner fra linje til linje, når argumentsettet uttrykkes forskjellig.

Innholdet av parentesens må forstås som en *operator*, den virker på $\mathbf{u}$ som står bak parentesens. Det er innforstått at $\mathbf{u}$ kan multipliseres inn i parentesens, og skal da stå på høyre side i alle ledd, slik at derivasjonene kan utføres (derivasjonssymbolene skal alltid virke mot høyre).

Tre av parentesleddene kan slås sammen til ett. Innfør *nabla*- eller *del*-operatoren ∇ , og ta skalarproduktet² $\mathbf{u} \cdot \nabla$:

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = (u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}) \cdot \left(\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Uttrykket på ytterste høyre side er nettopp den kombinasjonen som forekommer i parentesens i $d\mathbf{u}/dt$.

Akselerasjonsvektoren ved forflytningen er nettopp lik $d\mathbf{u}/dt$. Vi justerer notasjonen og innfører symbolet D/Dt , kalt den *substansielt* (eller noen steder *materielt*) deriverte, som angir derivasjon langs banen, "en derivasjon som følger den strømmende substansen" som det er uttrykt noen steder:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}$$

Første ledd i parentesens gir opphav til den *lokale* akselerasjonen, mens annet ledd gir den *konvektive* akselerasjonen. For en stasjonær strøm, hvor $\partial\mathbf{u}/\partial t = 0$ i alle punkter i rommet, får vi eksplisitt at man likevel kan ha et konvektivt akselerasjonsbidrag:

$$\mathbf{a}_{\text{stasjonær}} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

Ved en stasjonær strøm av en inkompressibel fluid i et rør hvor tverrsnittsarealet er forskjellig på forskjellige steder, vil strømhastigheten langs røret variere, ifølge kontinuitetslikningen. Da må det nødvendigvis være akselerasjon langs banen, til tross for at den partielt tidsderiverte er lik 0 i alle punkter! Dette er nettopp den konvektive akselerasjonen.

Anta som spesialtilfelle at vi kan bruke approksimasjonen 1D strøm, med s en koordinat langs en representativ strømlinje. Hastighetsvektoren blir $\mathbf{V} = \mathbf{V}(t, s)$, og akselerasjonsvektoren blir

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + V \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s} \quad (V = |\mathbf{V}|)$$

Hvis banen som beskrives er krum, med krumningsradius r i et gitt punkt, vil normalakselerasjonskomponenten i retning mot krumningssenteret være

$$a_n = \frac{V^2}{r}$$

uansett størrelsen av akselerasjonen i tangensiell retning.

Den generelle akselerasjonsvektoren har komponenter i hver av romretningene:

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

I det generelle tilfellet får vi for komponentene:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

Eksempel:

Gitt hastighetsfeltet $u = ax$, $v = -ay$, $w = 0$, med a en konstant. Finn komponentene av akselerasjonsvektoren.

²Rekkefølgen av $\mathbf{u}$ og ∇ er essensiell! Med omvendt rekkefølge ville vi selvsagt fått $\nabla \cdot \mathbf{u} = du/dx + dv/dy + dw/dz$. Men i begge tilfelle fås en *skalar* størrelse, siden det er et skalarprodukt av to vektorer som blir beregnet.

Løsning:

Dette er en stasjonær strøm, uten lokal akselerasjon, siden $\partial u/\partial t = \partial v/\partial t = \partial w/\partial t = 0$. Uttrykkene for alle akselerasjonskomponentene følger da ved anvendelse av operatoren

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + 0 \frac{\partial}{\partial z} = ax \frac{\partial}{\partial x} - ay \frac{\partial}{\partial y}$$

Det gir:

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)u = ax \frac{\partial(ax)}{\partial x} - ay \frac{\partial(ax)}{\partial y} = a^2x$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)v = ax \frac{\partial(-ay)}{\partial x} - ay \frac{\partial(-ay)}{\partial y} = a^2y$$

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)w = ax \frac{\partial(0)}{\partial x} - ay \frac{\partial(0)}{\partial y} = 0$$

Vi ser at

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{x}{y}$$

i alle punkter. Akselerasjonsvektoren i alle punkter står derfor normalt på z -aksen i alle punkter, og er rettet utover uansett fortegnet på a .

For denne spesielle strømmen er også kontinuitetslikningen oppfylt. Det kommer vi tilbake til i kapittel 14.