

KORTFAKTEI LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a) Gjør uttrykket for innre partisjonsfunksjon:

$$Z_{int} = \sum_{E_r} g(E_r) e^{-\beta E_r}$$

$$= \sum_{E_r} g(E_r) e^{-\beta \frac{h^2}{2I} r(r+1)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) e^{-\beta \frac{h^2}{2I} r(r+1)} \quad (\text{som skulle vises})$$

b) $\beta \gg \frac{2I}{h^2} \Rightarrow T \ll \frac{h^2}{2Ik}$, altså en lavtemperaturgrense:

Bedre i summen etter svært høyt med skilte r og hvis vi inkluderer de to laveste nivåene har vi total med $(r=1)$ -leddet som blir det eneste signifikante med β -avhengighet:

$$\bar{E}_{int} = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln(1 + 3e^{-\beta \frac{h^2}{2I}})$$

$$= - \frac{1}{1 + 3e^{-\beta \frac{h^2}{2I}}} \left(-\frac{h^2}{2I} \right) 3e^{-\beta \frac{h^2}{2I}}$$

$$\approx 3 \frac{h^2}{2I} e^{-\beta \frac{h^2}{2I}}$$

gjeldende eksponensialfunksjonen i nevneren for reglesjortet bidrag.

c) Varmedekapasitet:

$$C_{rot} = N \cdot \frac{\partial \bar{E}_{int}}{\partial T}$$

$$= N \cdot \frac{\partial}{\partial T} \left(3 \frac{h^2}{2I} e^{-\beta \frac{h^2}{2I}} \right)$$

$$= N \cdot \frac{h^2}{2I} e^{-\beta \frac{h^2}{2I}} \left(\frac{h^2}{2I} \right) \left(\frac{1}{kT^2} \right)$$

$$= 3 N k \left(\frac{h^2}{2IkT} \right)^2 e^{-\frac{h^2}{2IkT}}$$

Og molar varmedekapasitet:

$$\frac{C_{rot}}{N} = 3 R \left(\frac{h^2}{2IkT} \right)^2 e^{-\frac{h^2}{2IkT}}$$

som skulle vises.

d) eksponensialuttrykket i C_{rot}/N kan skrives $e^{-2\theta_{rot}/T}$, $\theta_{rot} = \frac{h^2}{2Ik}$

θ_{rot} blir en parameter som skiller mellom lav-T- og høy-T-opførsel. Uttrykket, for karbonmonoksid ($I = I_{CO}$):

$$\theta_{rot} = \frac{(1.05 \times 10^{-34})^2}{2 \times 1.2 \times 10^{-26} \times 1.38 \times 10^{-23}} \frac{J \cdot s^2}{J \cdot K^{-1} \cdot kg \cdot m^2} = \frac{K}{K}$$

der.

$$\theta_{rot} = 3.10 K$$

(Her var det en uoverensstemmelse mellom utdelt oppgave-tekst og notisene i iareboka for 2011. Den er korrigert både her og i oppgavebesvarelsene som vi er mest utrolig utrolig. Siger jeg trakk for øst, følger jeg pga. dette, oppgave.)

Oppgave 2

a) Her kan vi ha $N=0$ og $N=1$, med to muligheter for $N=1$ (spinn opp eller ned).

$$\mathcal{Z} = \sum_{N=0}^1 e^{\beta(N\mu - E_N)}$$

$$= e^{\beta(\mu \cdot 0 - 0)} + e^{\beta(\mu \cdot 1 - (-\epsilon))} + e^{\beta(\mu \cdot 1 - (-\epsilon))}$$

$$= 1 + 2 e^{\beta(\mu + \epsilon)}$$

(som skulle vises)

b) Beviset kan formuleres på to tilnærmet like for forskjellige men likevel absolutte måter:

- * Den omvendte vil være fullt eller tomme uavhengig av temperatur. For å forhindre til $\mathcal{Z}$ med en eksponent som er en sum av additive bidrag, fra hvert nivå vil det totale, store konstante, bidraget i $\mathcal{Z}$ faktorisere i bidrag fra hvert nivå, som kan summeres.
- * $\mathcal{Z}$ er skrevet med en sum over alle tilstander for N -partikkel, uavhengig av temperatur. Og de vil være med tilsvarende faktorer i $\mathcal{Z}$.

c) ni findes som følger:

$$\begin{aligned} n_i &= - \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \\ &= kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \Sigma \\ &= n kT \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_1 \\ &= n kT \frac{1}{\sum_1} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_1 \\ &= n \frac{\frac{1}{\sum_1} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_1}{\frac{1}{\sum_1} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_1} \\ &= \frac{n}{1 + \frac{1}{\sum_1} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sum_1} \end{aligned}$$

$$(\Omega = -kT \ln \Sigma)$$

Oppeave 3

- a) En makrotilstand beskrives ved makroskopiske variable som f.eks. $P, V, T, \mu, E, S, \dots$ i mikrotilstand har specificeret position og impuls for hvert atom, den makroskopiske tilstand er statistisk velstillet og angiver hvor mange mikrotilstande som er kompatible med en given makrotilstand.
- b) Helmholtz' frie energi F har et minimum ved ligevægt, et "naturlig" termodynamisk potentiale for et system i ligevægt med et varmebad.
- c) $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$.
- d) $f(P)$ - tilstandsfordeling pr. subintervall af $P = |\vec{P}|$.
 $\bar{n}(P)$ - middlere besættelsestall for en tilstand
 N - # molekyler
 $P(P)dP$ - ssk. for at et givet "mængde" molekyl har impuls i intervallet $(P, P+dP)$.

- e) For en perfekt gas, der er en gas der består af uafhængige molekyler, vil partikelfunktionen for et enkelt molekyl i en tilstand være $\frac{1}{N}$ af den samlede funktion. Den er altså den samme for alle tilstande, uanset om de er i tilstand eller ikke.
- f) μ er kemisk potentiale. Ved $T=0$ for elektronene i et fast stof er μ lig med Fermienergien E_F . Ved $T=0$ er den højeste energi, der kan optage elektroner, E_F . Ved $T > 0$ er μ mindre end E_F .