UNIVERSITETET I STAVANGER 1. DESEMBER 2007

Eksamen i **BIT350 Statistisk fysikk**

Kortfatta framlegg til løysing

1.

a)
Sett inn totalenergien til eit molekyl i einpartikkelpartisjonsfunksjonen. Summen over r tilsvarar at ein skal summere over både translasjons- og vibrasjonskvantetala. Og denne summen faktoriserer, av di dei to energibidraga er uavhengige:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sum_s \sum_\alpha e^{-\beta\epsilon_s^{\mathrm{tr}}} e^{-\beta\epsilon_\alpha^{\mathrm{int}}} \\ &= \sum_s e^{-\beta\epsilon_s^{\mathrm{tr}}} \sum_\alpha e^{-\beta\epsilon_\alpha^{\mathrm{int}}} \\ &= Z_1^{\mathrm{tr}}\, Z_{\mathrm{int}} \end{aligned}$$

Partisjonsfunksjonen Z_1 for eit molekyl i ein slik perfekt gass faktoriserar altså i partisjonsfunksjonen Z_1^{tr} for translasjonsrørsla og partisjonsfunksjonen Z_{int} for den indre vibrasjonen.

b)
Døyp om indeks "int" til indeks "vib"; indre energi kan tenkjast å ha fleire bidrag, men her ser vi berre på vibrasjonsenergien. I partisjonsfunksjonen får vi sum over ei konvergent uendeleg geometrisk rekke, og finn lett det som oppgåva spør etter:

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{vib}} &= \sum_\alpha e^{-\beta\epsilon_\alpha^{\mathrm{vib}}} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(\alpha+1/2)} \\ &= e^{-x/2}\sum_{\alpha=0}^{\infty} e^{-x\alpha} \qquad \left(x=\beta\hbar\omega=\frac{\Theta_{\mathrm{vib}}}{T}, \qquad \Theta_{\mathrm{vib}}=\frac{\hbar\omega}{k}\right) \\ &= \frac{e^{-x/2}}{1-e^{-x}} \end{aligned}$$

c)

$$\Theta_{\mathrm{vib}} = \frac{0.3}{8.61734\times 10^{-5}}\,\mathrm{K} = \qquad 3480\,\mathrm{K}$$

$$x = 3480/1000 = \qquad 3.48$$

$$C_{\mathrm{vib}}/R = (3.48)^2 \frac{e^{3.48}}{(e^{3.48}-1)^2} = \qquad 0.397$$

I grensa $T\to\infty$ $(x\to 0)$:

$$C_{\mathrm{vib}}/R = \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\ldots}{(1+x+\frac{1}{2}x^2+\ldots-1)^2} = x^2\frac{1+x+\ldots}{x^2(1+\frac{1}{2}x+\ldots)^2} \quad \xrightarrow[x\to 0]{} \qquad 1$$

Vibrasjonsfridomsgradene er "fullt eksitert" i grensa $T\to\infty$. Ved "romtemperatur" er eksitasjonsgraden omtrent 0.4. Siden "romtemperatur" er monaleg lægre enn 1000 K, fylgjer det at dei

er endå mindre eksitert der. (Om ein set inn 300 K i uttrykket, finn ein omlag verdien 0.0012 for eksitasjonsgraden.)

d)
Forholdet mellom populasjonane i første vibrasjonseksiterte tilstand og grunntilstanden er predikert av Boltzmannfordelinga. Partisjonsfunksjonen blir kansellert ut i dette forholdet:

$$\frac{p_1}{p_0} = e^{-\beta(\epsilon_1^{\mathrm{vib}}-\epsilon_0^{\mathrm{vib}})} = e^{-\beta\hbar\omega} = e^{-3.48} = \qquad 0.0308$$

2.

a)
$\overline{n}(\epsilon)$ står for midlare fyllingstal (besetjingstal) i ein tilstand med energi ϵ. $f(\epsilon)\,d\epsilon$ er talet på kvantemekanisk tillatne tilstandar i energiintervallet $(\epsilon,\ \epsilon+d\epsilon)$.

μ er det kjemiske potensialet. Det er definert som ein derivert av varmebadsentropien S_2 med omsyn på det totale partikkeltalet N_0 (men det spør ikkje oppgåva etter):

$$\mu \equiv -T\left(\frac{dS_2}{dN_0}\right)$$

b)
Grenseverdien

$$\epsilon_F \equiv \lim_{T\to 0}\mu$$

i eit system av fermionar vert kalla Fermienergien. Den er det høgste kvantemekaniske energinivået som er fylt ved $T=0$.

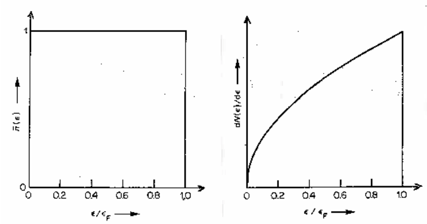
Vi ser at

$$\lim_{T\to 0} e^{(\epsilon-\epsilon_F)/kT} = \begin{cases} 0 & (\epsilon<\epsilon_F) \\ 1 & (\epsilon=\epsilon_F) \\ \infty & (\epsilon>\epsilon_F) \end{cases}$$

Vi finn då at det midlare besetjingstalet blir ein trappetrinnsfunksjon i grensa $T\to 0$:

$$\lim_{T\to 0}\overline{n}(\epsilon) = \begin{cases} 1 & (\epsilon<\epsilon_F) \\ 1/2 & (\epsilon=\epsilon_F) \\ 0 & (\epsilon>\epsilon_F) \end{cases}$$

$dN/d\epsilon$ blir ein snipp av den eine greina av ein liggjande parabel, av di den stykkevis konstante $\overline{n}(\epsilon)$'en er multiplisert med potensen $\epsilon^{1/2}$. Oppteikna:



c)
Integrasjon av $dN/d\epsilon$ gjev det totale elektrontalet N. I grensa $T\to 0$ blir integrasjonen særs enkel, på grunn av den enkle forma til $\overline{n}$:

$$
\begin{aligned}
N &= \int_0^\infty \frac{dN}{d\epsilon} d\epsilon \\
&= \int_0^{\epsilon_F} f(\epsilon)\, d\epsilon \\
&= V \frac{2^{1/2}}{\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{1/2}\, d\epsilon \\
&= V \frac{2^{3/2}}{3\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon_F^{3/2}
\end{aligned}
$$

Dette resultatet kan vi snu om på for å få ϵ_F uttrykt ved elektrontettleiken N/V, og slik finne uttrykket som er oppgjeve i oppgåveteksten. Frå mellomrekninga viser vi her eit trinn:

$$3\pi^2 \frac{N}{V} = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\epsilon_F\right)^{3/2}$$

Og altså:

$$\epsilon_F = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

d)
Ved ein heilt tilsvarande integrasjon (no over $\epsilon_F^{3/2}$) finn vi midlare energi $\overline{E}$ i elektrongassen ved $T = 0$. Ved å eliminere ϵ_F mellom dette uttrykket for $\overline{E}(= E)$ og uttrykket frå punkt c), finn vi det oppgjevne uttrykket for E/V som funksjon av N/V (det slapp du altså å gjere sjølv). Ved å sette det oppgjevne E/V-uttrykket rett inn i uttrykket for trykk som finst på side 1 i oppgåveteksten, får vi resultatet for trykket i elektrongassen i grensa $T \to 0$:

$$P = \frac{2}{3}\frac{E}{V} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{5}(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} = \frac{1}{5}(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

d)
Trykket divergerer $\propto (V/N)^{-5/3}$ i grensa av små volumer.

Trykkauken er eit utslag av Pauliprinsippet, som og ligg til grunn for det periodiske systemet av grunnstoffer: Naturen ynskjer ikkje å ha to (endå mindre fleire) identiske fermioner i same tilstand, dvs. til dømes på same stad. Den seier frå via denne trykkauken.

Elektronane er fermionar og har spinn 1/2. Den einaste andre partikkeleigenskapen som inngår, er elektronmassen. Nøytroner er og fermioner med spinn 1/2. Det såkalla degenerasjonstrykket i elektrongassen approksimerer difor likevektstrykket i ei nøytronstjerne ved $T \approx 0$ (i alle fall for dei ytre laga), berre med elektronmassen bytta ut med nøytronmassen. Om ein vil bruke ein språkblome: Nøytronane kviler på den kvantemekaniske umogelegheita. Degenerasjonstrykket spelar og ei rolle i kvite dvergstjerner, som eit trykkbidrag i den ikkje fullt så kalde elektrongassen der.

3.

a)
Det totale leddtalet er $N = N_+ + N_-$. Den statistiske vekta, talet på måtar å velje ut N_+ ledd frå dei totale N ledda, blir

$$\Omega(N_+, N) = \binom{N}{N_+} = \frac{N!}{N_+!\,(N-N_+)!} = \frac{N!}{N_+!\,N_-!}$$

b)

Polymerlengda blir

$$
\begin{aligned}
L &= N_+a + N_-(-a) \\
&= N_+a + (N - N_+)(-a) \\
&= 2N_+a - Na \\
&= -2N_-a + Na \qquad \text{(om ein i staden eliminerer } N_+\text{)}
\end{aligned}
$$

Resultatet kan trivielt vendast om til å gje eit uttrykk for N_+ og N_- under eitt:

$$N_\pm = \frac{Na \pm L}{2a}$$

c)
Ved å bruke det oppgjevne uttrykket for τ, finn vi ved derivasjon av oppgjeven S:

$$
\begin{aligned}
\tau = \frac{1}{2}NkT \Bigg\{ & \frac{1}{Na}\ln(1+\frac{L}{Na}) + (1+\frac{L}{Na})\frac{1}{(1+\frac{L}{Na})}\frac{1}{Na} \\
& + \frac{-1}{Na}\ln(1-\frac{L}{Na}) + (1-\frac{L}{Na})\frac{1}{(1-\frac{L}{Na})}\frac{-1}{Na} \Bigg\}
\end{aligned}
$$

Høgre ledd i øvste line kansellerer mot høgre ledd i nedste line. Dei resterande to ledda kombinerer seg til å gje uttrykket for strekkspenninga som oppgåveteksta nemner:

$$\tau = \frac{kT}{2a}\ln\frac{1+\frac{L}{Na}}{1-\frac{L}{Na}}$$

d)
I grensetilfellet $L \ll Na$ kan ein bruke rekkeutviklinga oppgjeven på side 1:

$$
\begin{aligned}
\tau &= \frac{kT}{2a}\left\{(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots) - (-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \ldots)\right\} \qquad (x = \frac{L}{Na}) \\
&= \frac{kT}{a}x\left\{1 + \frac{1}{3}x^2 + \ldots\right\} \\
&= \sigma L\left\{1 + \mathrm{O}\left[(\frac{L}{Na})^2\right]\right\} \qquad (\sigma = \frac{kT}{Na^2})
\end{aligned}
$$

I grensa er $\sigma \propto L$. Denne samanhengen er ei form av Hookes lov.

For konstant strekkspenning τ medfører det at

$$L \propto \frac{1}{T}$$

Lengda avtek når temperaturen aukar.