

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: BIT350 Statistisk fysikk **DATO:** 1. desember 2008

TID FOR EKSAMEN: kl. 09-13 (4 timer)

TILLATTE HJELPEMIDDEL: Bestemt, enkel kalkulator (kode C)
Valgfri standard formelsamling

**OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER PÅ 4 SIDER,
INKL. DENNE FORSIDEN**

MERKNADER: —

OPPGITT:

$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad k = 8.61734 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}, \quad R = N_A k, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \quad e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{1}{2}x^2 + \dots, \quad \ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + \dots$$

$$\epsilon_r \equiv \epsilon_{s\alpha} = \epsilon_s^{\text{tr}} + \epsilon_{\alpha}^{\text{int}}, \quad Z_1 = \sum_r e^{-\beta \epsilon_r}$$

$$p_r = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_r} \quad (\text{Boltzmannfordelingen})$$

$$P = \frac{1}{3} \overline{\rho v^2} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{1}{2} \overline{mv^2} = \frac{2}{3} \frac{E}{V} \quad (\text{ikke } \frac{1}{3} \text{ som for fotoner})$$

$$S = k \ln \Omega$$

Oppgave 1

Et diatomisk molekyl som for eksempel N_2 kan approksimeres som en endimensjonal harmonisk oscillator med sirkelfrekvens ω . Ifølge kvantemekanikken har et slikt system et uendelig sett av ikke-degenererte energinivåer

$$\epsilon_{\alpha} = \hbar \omega \left(\alpha + \frac{1}{2} \right), \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \infty$$

Nivåavstanden for nitrogen er $\hbar \omega \approx 0.3 \text{ eV}$.

a) Forklar hvorfor partisjonsfunksjonen for et slikt molekyl i en perfekt N_2 -gass faktoriserer i ett ledd som skyldes translasjonen, og ett ledd som skyldes den indre vibrasjonen.

b) Utled at uttrykket for vibrasjonspartisjonsfunksjonen Z_{vib} for ett molekyl blir (vis regningen!)

$$Z_{\text{vib}} = \frac{e^{-x/2}}{1 - e^{-x}}, \quad x = \beta \hbar \omega = \frac{\Theta_{\text{vib}}}{T}, \quad \Theta_{\text{vib}} = \frac{\hbar \omega}{k}$$

Og nå får du oppgitt at bidraget til spesifikk molar varmekapasitet som skyldes vibrasjonene dermed blir (det skal du altså ikke utlede):

$$C_{\text{vib}} = R x^2 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

c) Beregn verdien av Θ_{vib} , beregn deretter x for $T = 1000 \text{ K}$, og finn verdien av C_{vib}/R . Hva blir C_{vib}/R istedet hvis $T \gg \Theta_{\text{vib}}$? Er vibrasjonsfrihetsgradene mye eller lite eksitert for nitrogen ved værelsestemperatur (omtrent 300 K)?

d) Fremdeles ved $T = 1000 \text{ K}$, i en gass i termisk likevekt, finn forholdet mellom populasjonene i første eksiterte tilstand ($r = 1$) og grunntilstanden ($r = 0$).

Oppgave 2

Visse fysiske egenskaper for et metall kan beskrives ved å behandle ledningselektronene som en perfekt kvantegass som følger Fermi-Dirac-statistikk. Midlere elektrontall pr. energienhet er gitt ved

$$dN(\epsilon) = \bar{n}(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon$$

hvor

$$\bar{n}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}, \quad f(\epsilon) = V \frac{2^{1/2}}{\pi^2} \left(\frac{m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2}$$

- Forklar hva størrelsene $\bar{n}(\epsilon)$ og $f(\epsilon)$ representerer. Hva kalles μ ?
- Hva kalles grenseverdien ϵ_F av μ når $T \rightarrow 0$? Hvilken fysisk interpretasjon har ϵ_F ? Tegn, for $T = 0$, skisser av $\bar{n}(\epsilon)$ og $dN/d\epsilon$ som funksjoner av ϵ .
- Finn det totale elektrontallet N ved integrasjon, i grensen $T \rightarrow 0$ (vis regningen). Vis at resultatet kan omskrives til

$$\epsilon_F = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

- Ved en tilsvarende integrasjon kan den totale energien E finnes ved $T \rightarrow 0$, og ϵ_F kan elimineres mellom de to uttrykkene slik at man finner (dette er oppgitt og det skal du ikke beregne):

$$\frac{E}{V} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3}$$

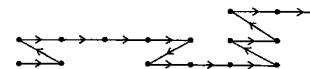
Beregn nå trykket P i elektrongassen i grensen $T \rightarrow 0$! (Vis regningen.)

- Hvordan oppfører dette trykket seg i grensen $(N/V) \rightarrow \infty$? Hva skyldes dette trykket? (Husk at for en klassisk perfekt gass ville trykket bli lik 0 for $T = 0$.) Beregningen var for en elektrongass i en metallbit; men hvilken egenskap ved elektronene er det som gir beregningen relevans også for forståelsen av nøytronstjerner og hvite dvergstjerner?

Oppgave 3

I denne oppgaven ser vi på en endimensjonal modell for materialer av typen gummi.

La et polymer bestå av en kjede av N monomerer som alle har samme lengde a . Hver monomer har 2 orienteringsmuligheter, idet den kan peke mot høyre eller mot venstre, med samme energi for begge. Vi lar N_+ og N_- betegne henholdsvis antall høyre- og venstrepekende ledd. Kjeden totale lengde kalles L . (På figuren under er venstrepekende ledd tegnet i en skråvinkel for å få organiseringen tydelig fram.) En makrotilstand kan beskrives som (L, N) eller for ek-



sempel (N_+, N_-) . Vi skal anta som kjent uttrykket for entropien S for tilfellet der N , N_+ og N_- alle er $\gg 1$,

$$S(L, N) = Nk \left[\ln 2 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{L}{Na} \right) \ln \left(1 + \frac{L}{Na} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{L}{Na} \right) \ln \left(1 - \frac{L}{Na} \right) \right]$$

og dessuten anta som kjent at siden 2. hovedsetning for et elastisk system kan skrives som $dE = T dS + \tau dL$, er strekkspenningen i kjeden ("snorstrammingen") τ definert som

$$\tau = -T \left(\frac{\partial S}{\partial L} \right)_E$$

- Skriv opp uttrykket for statistisk vekt $\Omega(N_+, N)$ for vilkårlige verdier av N , N_+ og N_- , som uttrykket for $S(L, N)$ ble utledet fra.

- Sett opp et uttrykk for lengden av en polymer, og vis at antallet av monomerer av de to typene er gitt ved

$$N_{\pm} = \frac{Na \pm L}{2a}$$

- Utleid at strekket i kjeden, τ , er gitt ved

$$\tau = \frac{kT}{2a} \ln \left(\frac{1 + \frac{L}{Na}}{1 - \frac{L}{Na}} \right)$$

- Vis at i spesialtilfellet $L \ll Na$ vil uttrykket for τ forenkles til et uttrykk av samme form som Hookes lov, $\tau = \sigma L$. Hvordan varierer L med T ved konstant τ ? (Begrunn svaret ut fra uttrykket for σ som du fant.)