Universitetet i Stavanger

UNIVERSITETET I STAVANGER 5. DESEMBER 2007

Eksamen i **BIT350 Statistisk fysikk**

Kortfatta framlegg til løysing

1.

a)
x uttrykt ved ω er ekvivalent med x uttrykt ved λ, av di ω og λ avheng av kvarandre ved $\omega\lambda = 2\pi c$. For å finne bylgjelengdespektret reknar vi ut den deriverte av samanhengen mrllom dei, og uttrykker den ved x og konstantar:

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right) = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} = -\frac{1}{2\pi\beta\hbar c}x^2$$

Maksimum av bylgjelengdespekteret finn vi ved derivasjon:

$$\frac{d}{d\lambda}u(\lambda,T) = \frac{dx}{d\lambda}\times\frac{d}{dx}\left\{u(\omega,T)\left|\frac{d\omega}{d\lambda}\right|\right\} = -\frac{2\pi\beta\hbar c}{\lambda^2}\times\frac{4}{\beta^3h^2c^3}\times\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{e^x-1}\right) = 0$$

Dette er mogeleg berre dersom

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{e^x-1}\right) = 0$$

og det vart vi bedne om å vise.

b)
Utfør derivasjonen, og få straks akkurat det vi vart bedne om å vise, etter litt forkorting:

$$\frac{5x^4(e^x-1) - x^5e^x}{(e^x-1)^2} = 0$$

$$(5-x)e^x = 5$$

c)
Relasjonen under b) har løysing som vi kallar ${x_\lambda}^{\text{maks}}$, og den tilsvarande for frekvensspekteret (som var oppgjeve) kallar vi ${x_\omega}^{\text{maks}}$. Talverdiane for begge står i oppgåveteksten (desse x-ane kan berre finnast ved numerisk løysing). Sidan

$$\omega^{\text{maks}} = \frac{{x_\omega}^{\text{maks}}}{\beta\hbar}; \qquad \lambda^{\text{maks}} = \frac{2\pi\beta\hbar c}{{x_\lambda}^{\text{maks}}}$$

får vi

$$\frac{\omega^{\text{maks}}\lambda^{\text{maks}}}{2\pi} = \frac{{x_\omega}^{\text{maks}}}{{x_\lambda}^{\text{maks}}}c \approx \frac{2.822}{4.9651}c \approx 0.5680c \neq c$$

Maksimumsposisjonane i frekvens og bylgjelengde er altså ikkje dei samsvarande som ville fulgt av fundamentalrelasjonen $\omega\lambda/2\pi = c$. Det kjem heilt enkelt av at samanhengen mellom $d\omega$ og $d\lambda$ avheng av λ (eller ekvivalent av ω), dvs. ikkje ein rein talfaktorsproporsjonalitet:

$$d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\,d\lambda$$

d)
Vi har

$$\beta = \frac{1}{kT} = \frac{{x_\lambda}^{\text{maks}}\lambda}{2\pi\hbar c}$$

der verdien av naturkonstantkombinasjonen som inngår, er oppgjeven på side 1 i oppgåveteksten. For solas overflatetemperatur får vi då:

$$T = \frac{hc}{{x_\lambda}^{\text{maks}}k}\frac{1}{\lambda} = 2.897\times10^{-3}\frac{1}{4800\times10^{-10}}\,\text{K} = 6035\,\text{K} \approx 6000\,\text{K}$$

2.

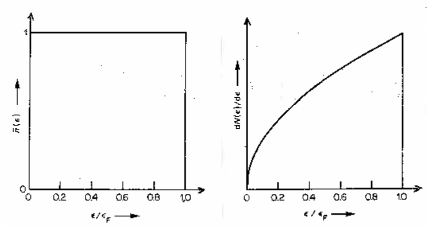
a)
Vi ser at

$$\lim_{T\to0} e^{(\epsilon-\epsilon_F)/kT} = \begin{cases} 0 & (\epsilon < \epsilon_F) \\ 1 & (\epsilon = \epsilon_F) \\ \infty & (\epsilon > \epsilon_F) \end{cases}$$

og dermed for midlare besetjingstal:

$$\lim_{T\to0} \overline{n}(\epsilon) = \begin{cases} 1 & (\epsilon < \epsilon_F) \\ 1/2 & (\epsilon = \epsilon_F) \\ 0 & (\epsilon > \epsilon_F) \end{cases}$$

I grensen $T\to0$ er altså $\overline{n}$ ein trappetrinnsfunksjon, og $dN/d\epsilon$ ein snipp av den eine greina av ein liggjande parabel:



Grenseverdien

$$\epsilon_F = \lim_{T\to0}\mu$$

(der μ er det kjemiske potensialet) går under namnet Fermienergien. Den er eit uttrykk for det øvste fylte energinivået i elektrongassen i grensen $T\to0$.

b)
Integrasjon av $dN/d\epsilon$ gjev det totale elektrontalet N. I grensen $T\to0$ blir integrasjonen svært enkel, på grun av den enkle formen til $\overline{n}$:

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty \frac{dN}{d\epsilon}d\epsilon \\ &= \int_0^{\epsilon_F} f(\epsilon)\,d\epsilon \\ &= \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^{\epsilon_F}\epsilon^{1/2}\,d\epsilon \\ &= \frac{8\pi V}{3h^3}(2m)^{3/2}\epsilon_F^{3/2} \end{aligned}$$

Dette resultatet kan vi rimeleg lettvint snu om på for å få ϵ_F uttrykt ved elektrontettleiken N/V, og dermed finne uttrykket som er oppgjeve i oppgåveteksten:

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

c)
Oppgåveteksten gjer seg umake med å nemne at vi kan gjere ein heilt tilsvarande enkel integrasjon for å finne midlare energi $\overline{E}$ i elektrongassen ved $T = 0$, og at om ein eliminerer ϵ mellom uttrykket for $\overline{E}(= E)$ og uttrykket frå punkt b), så finn vi det oppgjevne uttrykket for E/V som funksjon av N/V. Ved å sette inn i uttrykket for trykk som står på side 1 i oppgåveteksten, finn vi då heilt direkte resultatet for trykket i elektrongassen i grensen $T = 0$:

$$P \;=\; \frac{2}{3}\frac{E}{V} \;=\; \frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{5}(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} \;=\; \frac{1}{5}(3\pi^2)^{2/3}\frac{\hbar}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3}$$

d)
Trykket divergerer $\propto (V/N)^{-5/3}$ i grensen av små volumer. (Til samanlikning, ved isoterm kompresjon av ein klassisk perfekt gass divergerer trykket mindre raskt, som $(V/N)^{-1}$ ifølgje Boyle-Mariotte.)

Trykkauken er ein manifestasjon av Pauliprinsippet: Naturen ynskjer ikkje å ha to identiske fermioner i same tilstand, dvs. til dømes på same stad. Den seier frå via denne trykkauken før det skjer!

Den einaste spesifikke partikkeleigenskapen som inngår, er elektronmassen (i tillegg til at spinnet er halvtallig for eit fermion). Nøytroner er og fermioner. Det såkalla degenerasjonstrykket i elektrongassen finn vi difor igjen som tilsvarande trykk i ei (kald) nøytronstjerne, nøytronane kvilar på skuldrane til Pauli :-) ! Degenerasjonstrykket spelar og ei rolle i kvite dvergstjerner, som eit trykkbidrag i (den ikkje fullt så kalde) elektrongassen der.

<u>3.</u>

a)
Talet av mikrotilstandar er endelig, ut frå kvantemekanikken. Kvar makrotilstand (termodynamisk tilstand) til eit system har eit heilt bestemt tal av mogelege mikrotilstandar, alle like sannsynlege (Plancks hypotese), og vi kan ikkje skilje desse frå kvarandre.

Den statistiske vekta måler dette talet. I denne oppgåva står $\Omega(N, n)$ for talet av måtar vi kan plukke ut dei n atomene som flytter seg til overflata, blant dei N posisjonane i krystallgitteret.

b)
Entropien $S(N, n)$ er eit mål for graden av uorden. Når vi tar logaritmen av fakultetsfunksjonen, kan vi bruke Stirlings formel dersom argumentet er mykje større enn 1. Om dette skal holde samstundes for alle dei 3 fakultetane, må vi krevje (reint matematisk) i den fylgjande rekninga at $1 \ll n \ll N$. Etter innsetjing får vi direkte uttrykket som oppgåveteksten ber oss vise, av di ledd utan logaritme kansellerer:

$$S(N, n) = k\ln\Omega(N, n)$$

$$\begin{aligned} S(N, n) &= k[\ln N! - \ln n! - \ln(N-n)!] \\ &= k[N\ln N - N - n\ln n + n - (N-n)\ln(N-n) + (N-n)] \\ &= k[N\ln N - n\ln n - (N-n)\ln(N-n)] \end{aligned}$$

c)
Når systemet går mot termisk likevekt, går det mot større uorden, dvs. mot maksimal entropi. Vi

finn temperaturen T ut frå definisjonen med den deriverte av entropien ved energien, sjå uttrykket nedst side 1. For ein monoton funksjon $E(n)$:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial n}\Big/\frac{\partial E}{\partial n}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial n} &= k\left[-\ln n - n\frac{1}{n} + 1 + \ln(N-n) - (N-n)\frac{-1}{N-n} - 1\right] \\ &= k\ln\left(\frac{N-n}{n}\right) \\ \frac{\partial S}{\partial n} &= \epsilon \end{aligned}$$

Set inn, løys for T, og få direkte uttrykket som oppgåveteksten ber oss vise:

$$T = \frac{\epsilon}{\ln\left(\frac{N}{n} - 1\right)}$$

d)
Ved eksponensiering får vi det oppgåveteksten spør etter:

$$e^{-kT/\epsilon} = \frac{N}{n} - 1$$

$$\frac{n}{N} = \frac{1}{e^{-kT/\epsilon} + 1}$$

Delkravet $n \ll N$ under punkt b) har og eit fysisk innhald: Modellen må sjølvsagt bli heilt feil når $n \approx N$, dvs. når temperaturen blir så høg at dei fleste atomene har gått til overflata av krystallen.