

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: BIT350 Statistisk fysikk **DATO:** 5. desember 2007

TID FOR EKSAMEN: kl. 09-13 (4 timer)

TILLATTE HJELPEMIDDEL: Bestemt, enkel kalkulator (kode C)
Valgfri standard formelsamling

**OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER PÅ 4 SIDER,
INKL. DENNE FORSIDEN**

MERKNADER: —

OPPGITT:

$$\beta = \frac{1}{kT}, \quad \frac{hc}{4.9651 k} = 2.897 \times 10^{-3} \text{ Km}, \quad 1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$P = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$$

$$S = k \ln \Omega$$

$$\ln N! \approx N \ln N - N \quad (N \gg 1)$$

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V, N}$$

Oppgave 1

Når energispektret pr. frekvensenhet for svart hulromsstråling er kjent som

$$u(\omega, T) d\omega = \frac{4}{\beta^3 h^2 c^3} \frac{x^3}{(e^x - 1)} d\omega, \quad x = \beta \hbar \omega = \frac{2\pi \beta \hbar c}{\lambda}$$

der

$$\omega = 2\pi\nu, \quad \hbar = h/2\pi, \quad \nu = \frac{c}{\lambda}$$

med c lik lyshastigheten, så kan energispektret pr. bølgelengdeenhet finnes ut fra det ved

$$u(\lambda, T) d\lambda = u(\omega, T) \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| d\lambda$$

a) Vis ved eksplisitt regning at betingelsen for maksimum energi pr. bølgelengdeenhet blir

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^5}{e^x - 1} \right) = 0$$

b) Vis at dette resulterer i maksimalverdiposisjonen λ^{maks} gitt ved

$$(5 - x)e^x = 5$$

(der tilsvarende uttrykk for maksimalverdiposisjonen ω^{maks} i energispektret pr. frekvensenhet hadde 3 istedenfor 5).

c) Ved iterativ løsning finnes $x_{\lambda^{\text{maks}}} \approx 4.9651$, og tilsvarende for energispektret pr. frekvensenhet $x_{\omega^{\text{maks}}} \approx 2.822$ (anta disse to tallverdiene som oppgitt). Vis ved regning at

$$\omega^{\text{maks}} \lambda^{\text{maks}} / 2\pi = K c, \quad K \approx 0.5680$$

Begrunn ganske kort hvorfor $K \neq 1$, dvs. at toppene i de to spektrene ikke ligger ved samsvarende verdier av bølgelengde og frekvens.

d) Sola stråler til en god approksimasjon som et svart legeme. Man finner maksimum i utstrålt energi pr. bølgelengdeenhet ved $\lambda^{\text{maks}} = 4800 \text{ Å}$. Hva er dermed solas overflatetemperatur?

Oppgave 2

Flere fysiske egenskaper for et metall kan beskrives ved å behandle ledningselektronene som en kvantegass som følger Fermi-Dirac-statistikk. Midlere elektrontall pr. energienhet er gitt ved

$$dN(\epsilon) = \bar{n}(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon$$

hvor

$$\bar{n}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1}, \quad f(\epsilon) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2}$$

a) Tegn, for $T = 0$, en skisse av midlere besettestall $\bar{n}(\epsilon)$ og av elektrontall pr. energienhet $dN/d\epsilon$ som funksjoner av ϵ . Hva kalles grenseverdien ϵ_F av μ når $T \rightarrow 0$? Hvilken fysisk interpretasjon har ϵ_F ?

b) Finn det totale elektrontallet N ved integrasjon, i grensen $T \rightarrow 0$ (vis regningen). Vis at resultatet kan omskrives til

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3}$$

c) Ved en tilsvarende integrasjon kan den totale energien E finnes ved $T \rightarrow 0$, og ϵ_F kan elimineres mellom de to uttrykkene slik at man finner (det er oppgitt og det skal du ikke beregne):

$$\frac{E}{V} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar}{m} \left(\frac{N}{V} \right)^{5/3}$$

Beregn nå trykket P i elektrongassen i grensen $T = 0$! (Vis regningen.)

d) Hva skjer med dette trykket for $(N/V) \rightarrow \infty$? Hva skyldes det? Hvilken relevans har denne typen beregninger (for en elektrongass i en metallbit) for forståelsen av nøytronstjerner og hvite dvergstjerner?

Oppgave 3

Schottky-defekten i en krystall består i at atomer har løsnet fra sine gitterposisjoner pga. termiske vibrasjoner og vandret til overflaten av krystallen. Anta en krystall med totalt N gitterposisjoner, i en tilstand hvorav n posisjoner er blitt tømt for sitt atom som har vandret til overflaten. Anta videre at de flyttede atomene har gitt krystallen et ekstra energibidrag $E(n) = n\epsilon$, hvor konstanten ϵ er energibidraget pr. atom.

a) Forklar hvilke antagelser som ligger bak, og fører til, uttrykket for statistisk vekt:

$$\Omega(N, n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

b) Vis ved eksplisitt regning at for $1 \ll n \ll N$ er

$$S(N, n) = k[N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln(N-n)]$$

c) Vis ved eksplisitt regning at temperaturen T ved termisk likevekt blir

$$T = \frac{\epsilon}{k \ln\left(\frac{N}{n} - 1\right)}$$

d) Finn et uttrykk for fraksjonen n/N av atomer som har vandret til overflaten, ved termisk likevekt.