UNIVERSITETET I STAVANGER 15. MAI 2007

Eksamen i **BIT260 Fluidmekanikk**

Kortfatta framlegg til løysing

1.

a)
Snøggleiksdifferanse Δu over avstand Δy mellom aksling og kappe:

$$\Delta u = r\omega \,, \qquad \Delta y = R - r$$

Med $R - r \ll r$ kan ein tilnærme snøggleiksprofilet med ei rett line. Innsetting i uttrykket frå forsida av oppgåveteksten gjev svaret:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \approx \mu \frac{\Delta u}{\Delta y} = \mu \frac{r\omega}{R - r}$$

b)
Kvart flateelement dA på akslingen gjev eit dreiemomentbidrag $d\Gamma$ om senterlina i akslingen, som kan integrerast over overflata til å gje uttrykket ein skulle vise (alle flateelement har same r og τ):

$$d\Gamma = r\tau dA$$

$$\Gamma = r\tau \int_A dA = r\tau A = r\tau 2\pi r L = \mu \frac{r\omega}{R - r} 2\pi r^2 L$$

c)
Med talverdiane sett inn:

$$P = \Gamma\omega = 2\pi \frac{\mu r^3 \omega^2 L}{R - r} = 2\pi \frac{0.12(0.04)^3 (2\pi \times 2)^2 0.1181}{0.04015 - 0.04}\,\mathrm{Nm/s} \;= \qquad 6.00\,\mathrm{W}$$

2.

a)
Vektstraumrata for brent flybensin:

$$(\rho g Q)_{\mathrm{brensel}} = R\rho_{\mathrm{luft}} g A_1 V_1 = \frac{1}{26} \times 1.205 \times 9.80665 \times 0.0407 \times 280\,\mathrm{N/s} \;= \qquad 5.18\,\mathrm{N/s}$$

b)
Eksosen si massestraumrate er summen av ratene for innstrøymande luft og bensin:

$$(\rho Q)_{\mathrm{ut}} = (1 + R)\rho_{\mathrm{luft}} A_1 V_1 = \left(1 + \frac{1}{26}\right) 1.205 \times 0.0407 \times 280\,\mathrm{kg/s} \;= \qquad 14.3\,\mathrm{kg/s}$$

c)
F_x, definert positiv i luftstraumen si retning på figuren, vert balansert av $(-F_x)$ som verkar *frå* luftstraumen *på* motoren. Motorens si kraft *på* gassane i kontrollvolumet blir då $+F_x$, framleis definert positiv i luftstraumen si retning. Komponenten av impulssatsen i denne retninga gjev, når gaugetrykk for luft vert brukt i trykkbidraga:[1]

$$F_x \;=\; (\rho Q V)_{\mathrm{ut}} - (\rho Q V)_{\mathrm{inn}}$$

[1] Talverdiane er nesten dei same som i ei læreboksoppgåve – men resultatet er kanhende ikkje mykje til skyvkraft for eit fly som rører seg med omtrent Mach 0.85, det måtte nok vere eit lite fly.

$$
\begin{aligned}
&= \rho_{\text{luft}} A_1 V_1 \left[(1+R)V_2 - V_1\right] \\
&= 1.205 \times 0.0407 \times 280 \left[\left(1+\frac{1}{26}\right) 550.15 - 280\right] \text{ N} \\
&= 4.00\,\text{kN}
\end{aligned}
$$

3.

a)
Funksjonssamanhengen mellom Π_1 og Π_2 fører med seg at ein av dei kan skrivast som ein funksjon $\tilde{\phi}$ av den andre:

$$
\Phi(\Pi_1, \Pi_2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Pi_1 = \tilde{\phi}(\Pi_2) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{gh^3}{q^2} = \tilde{\phi}(\frac{h}{H})
$$

Løys for q, og få ein ny ukjent funksjon Φ_1, slik oppgåveteksten seier:

$$
q = \sqrt{g} h^{3/2} \left[\tilde{\Phi}(\frac{h}{H})\right]^{-1/2} = \sqrt{g} h^{3/2} \Phi_1(\frac{h}{H})
$$

b)
Samanhengen held for prototype og modell kvar for seg:

$$
\begin{aligned}
q_p &= \sqrt{g} h_p^{3/2} \Phi_1(\frac{h_p}{H_p}) \\
q_m &= \sqrt{g} h_m^{3/2} \Phi_1(\frac{h_m}{H_m})
\end{aligned}
$$

Ved similaritet ($\Pi_{2\text{p}} = \Pi_{2\text{m}}$) fell Φ_1-faktorane bort når likningane dividerast på kvarandre, og attende står uttrykket ein skulle vise:

$$
\frac{q_p}{q_m} = \left[\frac{h_p}{h_m}\right]^{3/2} = \left[\frac{H_p}{H_m}\right]^{3/2} = \lambda^{-3/2}
$$

c)

$q_p = \lambda^{-3/2} \dfrac{Q_m}{b_m} = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{-3/2} \dfrac{0.0256}{0.32}\,\text{m}^3/\text{ms} \; = \qquad 5.12\,\text{m}^3/\text{ms}$

$Q_p = q_p b_p = 5.12 \times 390.65\,\text{m}^3/\text{s} \; = \qquad 2000\,\text{m}^3/\text{s}$

4.

a)
Innsetting og litt rekning, med eininga (m) for D undertrykt i notasjonen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{D} &= \frac{0.00025}{D} \\
V = \frac{4}{\pi}\frac{Q}{D^2} &= \frac{4}{\pi}\frac{0.1969}{D^2} = \frac{0.250701}{D^2} \\
\text{Re} = \frac{DV}{\nu} &= \frac{D}{1.003 \times 10^{-6}} \frac{0.250701}{D^2} = \frac{249951}{D}
\end{aligned}
$$

b)
Sett inn i $h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$:

$$4.0 = f\frac{60.93}{D}\frac{(0.250701)^2}{D^4}\frac{1}{2\times 9.80665} \quad \Rightarrow \quad \frac{D^5}{f} = 0.0488123 \quad \Rightarrow \quad D = 0.546645 f^{1/5}$$

c)
Klar til å iterera, med bruk av likningane for $D = D(f)$, ϵ/D, V og Re. Start med ein vald f-verdi, set inn i likningane, finn så ein ny f frå Moody-diagrammet, og gjer iterasjonane om igjen om f-verdien forandra seg. Prøv, som oppgjeve, $f_{\text{start}} = 0.02$ som er passe "midt i" Moody-diagrammet (tommelfingerregelen for ei type 3 rekning er at ein starter der):

It. #	1	2
f_{inn}	0.02	
$D(\text{ m})$	0.2500	
e/D	0.001	
Re	$\approx 1.0\times 10^6$	
f_{ut}	0.02	(allerede konvergert!)

Det synte seg (merkelig nok) at ϵ/D var slik at ein slapp å interpolera mellom kurver i Moody-diagrammet. Dessutan var prøveverdien allereie så nær den rette at ein slapp å gjenta iterasjonen.

d)
Svaret fann du alt under c). D-verdien ein finn, er den minst mogelege for at straumen skal gå som beskrevet. Altså:

$$D \geq 0.25\,\text{m}$$

5.

a)
Snøggleikskomponentane:

$$u = -\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{2})a(x^2+y^2-2z^2) = ax$$
$$v = -\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{2})a(x^2+y^2-2z^2) = ay$$
$$w = -\frac{\partial}{\partial z}(-\frac{1}{2})a(x^2+y^2-2z^2) = -2az$$

b)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial(ax)}{\partial x} + \frac{\partial(ay)}{\partial y} + \frac{\partial(-2az)}{\partial z} = a + a - 2a = 0$$

Divergensen er lik 0, så snøggleiksfeltet oppfyller kontinuitetslikninga.

c)
Kvrervlingskomponentane:

$$\xi_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0 - 0 = 0$$
$$\xi_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0 - 0 = 0$$
$$\xi_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

Altså 0 kvervling. Det var å vente sidan eit snøggleikspotensial er oppgjeve, og potensialet eksisterer berre for kvervlingsfri straum.

d)
Sett inn, forkort bort a, integrer, eksponensier. Med integrasjonskonstantar $\tilde{C}$ og C:

$$\frac{dx}{ax} = -\frac{dz}{2az} \qquad \Rightarrow \qquad -2\ln x + \tilde{C} = \ln z \qquad \Rightarrow \qquad e^{\tilde{C}}\frac{1}{x^2} = z$$

Eller:

$$z = \frac{C}{x^2}$$

e)
Straumfeltet kan tenkjast å gjelde for ein inkompressibel straum ovanfrå (for $a > 0$) langs z-aksen, som bøyer av til sidene utover frå z-aksen ved det ugjennomtrengelege xy-planet. I xz-planet og i alle andre plan som z-aksen ligg i, ser straumen nokorlunde slik ut: