Kortfatta framlegg til løysing

1.

a)
For den projiserte flata:

$$F_h = \rho g h_c A = s\rho_{\text{vann}} g \left(h + \tfrac{1}{2}R\right) bR = 0.841 \times 998.2 \times 9.80665(1+\tfrac{1}{2}1)2.5 \times 1\ \text{N} = \quad 30.9\,\text{kN}$$

$$h_p = h_c + \frac{I_c}{h_c A} = h + \tfrac{1}{2}R + \frac{1}{12}\frac{bR^3}{(h+\frac{1}{2}R)bR} = \frac{h^2 + hR + \frac{1}{3}R^2}{h + \frac{1}{2}R}$$

$$= \frac{1+1+\frac{1}{3}1}{1+\frac{1}{2}}\ \text{m} = \frac{14}{9}\ \text{m} = \quad 1.56\,\text{m}$$

b)
Vekt av overliggjande vassvolum:

$$F_v = \rho g\left[b(h+R)R - \tfrac{1}{4}\pi bR^2\right] = s\rho_{\text{vann}} g bR\left[h + (1-\tfrac{\pi}{4})R\right]$$
$$= 0.841 \times 998.2 \times 9.80665 \times 2.5 \times 1\left(1 + (1-\tfrac{\pi}{4})1\right)\ \text{N} = \quad 25.0\,\text{kN}$$

c)
Dreiemomentbidraget frå krafta på kvart einskild infinitesimalt delareal på sylinderflata blir lik 0, av di kraftvektoren alltid peikar rett mot krumningsaksen. Då må det totale dreiemomentet om krumningsaksen og bli lik 0.

d)
Betingelsen $F_v x_p - F_h(R + h - h_p) = 0$, dvs. totalt dreiemoment lik 0, gjev:

$$x_p = (h + R - h_p)\frac{F_h}{F_v} = \frac{\frac{1}{2}R\left(h + \frac{1}{3}R\right)}{h+\frac{1}{2}R} \times \frac{h + \frac{1}{2}R}{h + (1-\frac{\pi}{4})R} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1+\frac{1}{3}1}{1+(1-\frac{\pi}{4})1}\ \text{m} = \quad 0.549\,\text{m}$$

2.

a)
Legg eit kontrollvolum inni dysa. Hvis F_x (definert positiv i straumretninga som velgjast som x-retning) er kraftkomponenten i straumretninga som blir overført frå vatnet til dysa, så blir $-\boldsymbol{F}_x$ krafta overført til vatnet. Impulssats og kontinuitetsligning gjev:

$$-F_x + p_{1,\text{g}}\frac{\pi}{4}D_1^2 - p_{2,\text{g}}\frac{\pi}{4}D_2^2 = \rho\frac{\pi}{4}D_1^2 V_1(V_2 - V_1) \qquad (p_{2,\text{g}} = p_{\text{atm,g}} \stackrel{\text{def}}{=} 0)$$

$$V_1\frac{\pi}{4}D_1^2 = V_2\frac{\pi}{4}D_2^2$$

Samanhaldt:

$$F_x = \frac{\pi}{4}D_1^2\left[p_{1,\text{g}} - \rho V_1^2\left((\frac{D_1}{D_2})^2 - 1\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}(0.12)^2\left[400000 - 998.2(4.0)^2\left((\frac{0.12}{0.06})^2 - 1\right)\right]\ \text{N}$$
$$= 3.982\,\text{kN} \qquad \text{(dvs. vatnet skuver sjølve dysa i stråleretninga)}$$

b) Tapshead, direkte fra energiligninga ("Bernoullis likning med tapsledd"):

$$\begin{aligned} h_L &= \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}(V_1^2 - V_2^2) \\ &= \frac{p_{1,\text{g}}}{\rho g} - \frac{1}{2g}V_1^2\left((\frac{D_1}{D_2})^4 - 1\right) \\ &= \left[\frac{400\cdot 10^3}{998.2\cdot 9.80665} - \frac{1}{2\cdot 9.80665}(4.0)^2\left((\frac{0.12}{0.06})^4 - 1\right)\right]\ \text{m} \\ &= (40.86 - 12.24)\ \text{m} \\ &= 28.63\ \text{m} \end{aligned}$$

Kommentar:
Ein kan sjekke at ein slik verdi for h_L ville forutsette tapskoeffisientverdien $k_n \approx 2.2$. Altså godt og vel ein storleiksorden verre enn den vanlege 0.04 – 0.2 (se læreboka). Denne dysa måtte ha vore spesielt konstruert for å gje tap!

c)
I uttrykket for P_{tap} innfører vi $Q = \frac{\pi}{4}D^2 V$. Tapsenergi i dysa per tidseining blir då:

$$P_{\text{tap}} = \frac{\pi}{4}\rho_{\text{vann}} g D_1^2 V_1 h_L = \frac{\pi}{4} \times 998.2 \times 9.80665 \times (0.12)^2 \times 4.0 \times 28.63\ \text{W} = \quad 12.68\,\text{kW}$$

3.

a)
Kontinuitetslikninga er oppfylt i straumen:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -2K + 2 = 0$$

b)
Straumfeltet er kvervlingsfritt:

$$\xi = (\boldsymbol{\xi})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

c)
Når eit snøggleiksfelt er kvervlingsfritt kan det skrivast som ein gradient, $\boldsymbol{u} = -\nabla\phi$. Det gjev to differensiallikningar som må integrerast for å finne ϕ. Integrer til dømes først den i x; det gjev ein integrasjonskonstant $f(y)$ som kan finnast ved å sette inn i likninga i y. Resultatet blir ei differensiallikning for $f(y)$ som fører til ein integrasjonskonstant som per definisjon ikkje kan avhenge av x:

$$\begin{aligned} u &= -2Kx = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v &= 2Ky = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \end{aligned}$$

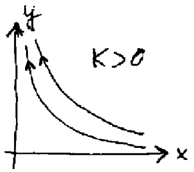
$$
\begin{aligned}
\phi &= Kx^2 + f(y) \\
v &= 2Ky \;=\; -0 - f'(y) \\
f(y) &= -Ky^2 + C
\end{aligned}
$$

Vi har altså fått det resultatet vi skulle vise:

$$\phi(x, y) = K(x^2 - y^2) + C$$

d)[1]

Med $K > 0$ ser vi at i første kvadrant er $u < 0$ og $v > 0$. Ved å flytte seg langs ei straumline nærmer ein seg difor y-aksen og medan ein fjerner seg frå x-aksen. Uttrykka $u = -Kx$, $v = Ky$ viser at "tilnærminga" til y-aksen blir langsommare etterkvart, og "fjerninga" frå x-aksen blir raskare. Skjematisk kan vi derfor teikne straumliner som likner på hyperblar:



4.

a)
I Bernoullis likning med tapsledd, følg ei straumline frå bassengoverflata gjennom røyret og dysa inntil der strålen kjem ut av dysa. (Eventuelt, med formulering som for energilikninga: Legg eit kontrollvolum med innløp i bassengoverflata og utløp i strålen.) Trykkledda vil tilnærma kansellere kvarandre, og fallsnøggleiken til overflata blir så langsam at det kinetiske energileddet der kan neglisjerast. Pumpeledd h_P fins ikkje, og høgdedifferansen $z_1 - z_2$ kan kallast z, som i figuren. Resultat, der ein har sett inn for h_L frå det oppgitte uttrykket ovanfor:

$$z = \frac{V_{\text{stråle}}^2}{2g} + h_L = 1.0035\frac{V_{\text{stråle}}^2}{2g}$$

$$V_{\text{stråle}} = \sqrt{2gz/1.0035} = \sqrt{2 \times 9.80665 \times 239/1.0035}\,\text{m/s} \;= \qquad 68.35\,\text{m/s}$$

$$d = \sqrt{4Q/(\pi V_{\text{stråle}})} = \sqrt{4 \times 1.3/(3.14159 \times 68.35)}\,\text{m} \;= \qquad 0.1556\,\text{m}$$

b)
Bruker vi h_L-uttrykket ovanfor, så tilsvarer det akkurat å bruke resulatet for $V_{\text{stråle}}^2/2g$ frå førre punkt. Då kan vi spare oss arbeid når effektiviteten η skal reknast ut:

$$P_{\text{ut}} = \eta\rho g Q(z - h_L) = \frac{1}{2}\eta\rho Q V_{\text{stråle}}^2$$

$$\eta = \frac{2P_{\text{ut}}}{\rho Q V_{\text{stråle}}^2} = \frac{2 \times 2.4 \times 10^6}{998.2 \times 1.3 \times (68.35)^2} \;= \qquad 0.792$$

c)
Samanlikn uttrykket for h_L ovanfor med det generelle uttrykket for friksjonsfaktor i røyr, side 1

[1]Vi tok ikkje straumfunksjonen ψ med i pensum i år. Den er konstant langs ei straumline. Hadde vi funne uttrykket for den (enkelt å finne), ville vi sett eksplisitt at straumlinene blir vaskeekte hyperblar.

i oppgåveteksten. Vi bruker kontinuitetslikninga for få både uttrykt ved $V_{\text{stråle}}$. Den faktoren kan forkortast bort, og vi finn då f for straumen i røyret:

$$0.0035\frac{V_{\text{stråle}}^2}{2g} = f\frac{L}{D}\frac{V_{\text{røyr}}^2}{2g} = f\frac{L}{D}\left(\frac{d}{D}\right)^4\frac{V_{\text{stråle}}^2}{2g}$$

$$f = 0.0035\frac{D^5}{Ld^4} = 0.0035\frac{(1.0)^5}{490 \times (0.1556)^4} \;= \qquad 0.0122$$

d)
Snøggleiken som inngår i snøggleiksskalaen u_* i det viskøse subsjiktet er middelsnøggleiken i røyret:

$$u_* = V_{\text{røyr}}\sqrt{\frac{f}{8}} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 V_{\text{stråle}}\sqrt{\frac{f}{8}} = \left(\frac{0.1556}{1.0}\right)^2 68.35\sqrt{\frac{0.0122}{8}}\,\text{m/s} \;= \qquad 0.0646\,\text{m/s}$$

Nominell tjukkelse av det viskøse subsjiktet:

$$\delta_v = 5\frac{\nu_{\text{vann}}}{u_*} = 5\,\frac{1.003 \times 10^{-6}}{0.0646}\,\text{m} \;= \qquad 0.0776\,\text{mm}$$

5.

a)
Ein neddykka lekam møter ingen bølgjekrefter (tyngdekrefter), så similaritetskravet blir *like Re*:

$$\left(\frac{LV}{\nu_{\text{vatn}}}\right)_p = \left(\frac{LV}{\nu_{\text{vatn}}}\right)_m$$

$$V_m = \frac{1}{\lambda}V_p = \frac{1}{6.0}15.0\,\text{m/s} \;= \qquad 2.5\,\text{m/s}$$

b)
Her går vi ut frå at bølgjekrefter er viktigast, og krev difor *like Fr*:

$$\left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_p = \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_m, \qquad \left(\sqrt{\frac{F_I}{F_G}}\right)_p = \left(\sqrt{\frac{F_I}{F_G}}\right)_m$$

$$V_p = \sqrt{\frac{L_p}{L_m}}V_m = \lambda^{-1/2}V_m = (1/49)^{-1/2}1.2\,\text{m/s} \;= \qquad 8.4\,\text{m/s}$$

$$F_{Gp} = \frac{F_{Ip}}{F_{Im}}F_{Gm} = \frac{\rho_{\text{vann}}V_p^2L_p^2}{\rho_{\text{vann}}V_m^2L_m^2}F_{Gm} = \lambda^{-3}F_{Gm} = \left(\frac{1}{49}\right)^{-3}0.02125\,\text{N} \;= \qquad 2500\,\text{N}$$

c)
Effekt = kraft × hastighet. Båtmotoren må kunne levere ein effekt som minst tilsvarer effekten som går med til å overvinne bølgjemotstanden:

$$P_p = F_{Gp}V_p = \lambda^{-7/2}F_{Gm}V_m = \left(\frac{1}{49}\right)^{-7/2}0.02125 \times 1.2\,\text{Nm} \;= \qquad 21.0\,\text{kW}$$