

Kortfatta løsningsforslag

1.

a)

Arkimedes' lov forutsetter at "fortrengt væskemengde" er entydig definert. Det er ikke tilfelle når det, slik som her, er forskjellig væske over og under. (Heller ikke, hvis et flytende legeme ikke har underliggende væske til samme høyde hele veien rundt.) Arkimedes' lov kan altså ikke brukes her, oppdrifta må beregnes eksplisitt som differansen mellom krefter oppover og nedover.

b)

Trykkraft mot oversida:

$$F_{\text{ned}} = \frac{\pi}{4} D^2 \rho_{\text{vann}} g H = \frac{\pi}{4} (0.5884)^2 998.2 \times 9.80665 \times 3.0 \text{ N} = 7985.4 \text{ N}$$

c)

Trykkraft mot undersida:

$$F_{\text{opp}} = \frac{\pi}{4} D^2 s_{\text{sjø}} \rho_{\text{vann}} g (H + h - \Delta H) = \frac{\pi}{4} (0.5884)^2 1.025 \times 998.2 \times 9.80665 \times (3.0 + 0.3 - 1.5) \text{ N} = 4911.0 \text{ N}$$

d)

Kraftbalansen når F er slik at luka akkurat åpner seg, gir den nødvendige løftekrafta:

$$F + F_{\text{opp}} - F_{\text{ned}} - W_{\text{luke}} = 0$$

$$F = F_{\text{ned}} + W_{\text{luke}} - F_{\text{opp}} = (7985.4 + 1925.6 - 4911.0) \text{ N} = 5.000 \text{ kN}$$

2.

a)

Volumstrømraten er ifølge kontinuitetslikninga den samme ved innløpet som ved utløpet:

$$V = \frac{4}{\pi} \frac{Q}{D^2} = \frac{4}{\pi} \frac{0.0277}{(0.75)^2} \text{ m/s} = 0.0627 \text{ m/s}$$

b)

Velg kontrollvolum med innløp ved flensene og utløp ved fri luft. I energilikninga / Bernoullis likning setter vi $h_P = h_L = 0$ og $z_{\text{inn}} = z_{\text{ut}}$, og får, med kontinuitetslikninga brukt på hastighetene:

$$\frac{p_{\text{inn}}}{\rho_{\text{vann}} g} + \frac{V^2}{2g} = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{vann}} g} + \frac{[(D/d)^2 V]^2}{2g}$$

Hvis gaugetrykk brukes, settes $p_{\text{atm}} = 0$ når det løses for p_{inn} :

$$p_{\text{inn}} = \frac{1}{2} \rho_{\text{vann}} V^2 \left[\left(\frac{D}{d} \right)^4 - 1 \right] = \frac{1}{2} 998.2 \times (0.0627)^2 [(4)^4 - 1] \text{ Pa} = 500.3 \text{ Pa}$$

c)

$-\mathbf{F}$ blir krafta som kranen virker på vannet med, og det er den størrelsen som inngår i impulssetningen. Vi kan velge å definere positive akseretninger mot høyre (horisontalt) og oppover. I

uttrykket for impulssetningen (oppgavesettet side 1) vil trykkrefter ved innløp og utløp i kontrollvolumet bare bidra i vertikalkomponenten av likninga, siden de virker vertikalt. Likeså vil innløps- og utløpshastighetene bare bidra på høyresida i vertikalkomponenten av likninga, siden de ikke har horisontalkomponenter. Horisontalkomponenten av impulssetningen gir altså:

$$-F_H + 0 + 0 = \rho_{\text{vann}} \frac{\pi}{4} D^2 V (0 - 0)$$

og dermed

$$F_H = 0$$

d)

Tilsvarende for vertikalkomponenten, med gaugetrykk brukt men tyngdebidraget sløffet, og innsett for utløpshastighetene fra kontinuitetslikninga:¹

$$-F_V + \frac{\pi}{4} D^2 p_{\text{inn}} + \frac{\pi}{4} D^2 p_{\text{atm}} = \rho_{\text{vann}} \frac{\pi}{4} D^2 V \left[- \left(\frac{D}{d} \right)^2 V - V \right]$$

$$\begin{aligned} F_V &= \frac{\pi}{4} D^2 \left\{ p_{\text{inn}} + \rho_{\text{vann}} V^2 \left[\left(\frac{D}{d} \right)^2 + 1 \right] \right\} = \frac{\pi}{4} (0.75)^2 \{ 500.3 + 998.2 (0.0627)^2 [(4)^2 + 1] \} \text{ N} \\ &= \{ 221.0_{(\text{trykkledd})} + 29.5_{(\text{hast.ledd})} \} \text{ N} = 250.5 \text{ N} \end{aligned}$$

3.

a)

Friksjonsfaktoren for vann løser vi ut fra uttrykket for h_L :

$$f_{\text{vann}} = \left(\frac{h_L}{L} \right)_{\text{vann}} \frac{2gD}{V^2} = 0.00019 \frac{2 \times 9.80665 \times 0.6}{(0.3343)^2} = 0.020$$

b)

Reynoldstallene fås rett fra definisjonen:

$$\text{Re}_{\text{vann}} = \frac{VD}{\nu_{\text{vann}}} = \frac{0.3343 \times 0.6}{1.003 \times 10^{-6}} = 199980 \approx 200000$$

$$\text{Re}_{\text{SAE30}} = \frac{\nu_{\text{vann}}}{\nu_{\text{SAE30}}} \text{Re}_{\text{vann}} = \frac{1.003 \times 10^{-6}}{4.79 \times 10^{-4}} 199980 = 418.7$$

c)

Det er et poeng i oppgaven at vannstrømmen er turbulent, mens oljestrømmen har $\text{Re}_{\text{SAE30}} < \text{Re}_{\text{krit}}$ og er laminær. For denne SAE30-olja kan vi bruke uttrykket for laminær friksjonsfaktor:

$$f_{\text{SAE30}} = \frac{64}{\text{Re}_{\text{SAE30}}} = \frac{64}{418.7} = 0.153$$

d)

Gå til det vedlagte Moody-diagrammet. Krysningpunktet mellom linjene for $\text{Re} = 200000$ og $f = 0.020$ havner, innafor avlesningsnøyaktighetene, omtrent midt mellom kurvene med parametre

¹Det er sjølsagt helt OK å bruke tallregning i stedet, med de numeriske verdiene for p_{inn} og V satt rett inn, uten å gjennomføre bokstavregninga. Men det er instruktivt å merke seg forenklingene! Og hvis man setter inn p_{inn} -uttrykket fra 3b), så kommer uttrykket for F_V over på den ganske enkle formen

$$F_V = \frac{\pi}{8} \rho_{\text{vann}} D^2 V^2 \left\{ \left(\frac{D}{d} \right)^2 + 1 \right\}^2$$

$e/D = 0.0006$ og $e/D = 0.0008$. Absolutt ruhet er altså (med godt avlesningsslingringsmonn)

$$e = D \times \left(\frac{e}{D} \right)_{\text{avlest}} \approx 0.6 \times 0.0007 \text{ m} = 0.42 \text{ mm}$$

e)

Nominell grensesjikttykkelse:

$$\delta_v = \frac{14.14 D}{\text{Re}_{\text{vann}} \sqrt{f_{\text{vann}}}} = \frac{14.14 \times 0.6}{200000 \times \sqrt{0.020}} \approx 0.3 \text{ mm}$$

I grensen $\text{Re} \rightarrow \infty$ skal f bli konstant, når ruhetsmålet e blir mye større enn δ_v . Vi ser fra Moody-diagrammet at den aktuelle f -kurven avviker $\approx 25\%$ fra glattrørsverdien når Re_{vann} -verdien brukes, men den er fredeles ikke blitt konstant for stigende Re -verdier. Vi fant $e/\delta_v \approx 1.4 \sim 1$. Dermed gir kurveformen samsvar med opplysninga side 1 i oppgaveteksten, at for $e/\delta_v \sim 1$ har vi “merkbare, men ikke dominerende, ruhetseffekter”.

4.

a)

Vi krever like potenser av dimensjonene M , L og T mellom venstre og høyre side av likninga for Π_2 .

$$M^0 L^0 T^0 = [L]^a [LT^{-1}]^b [ML^{-3}]^c [ML^{-1}T^{-1}]^{-1}$$

$$M: \quad 0 = c - 1$$

$$L: \quad 0 = a + b - 3c + 1$$

$$T: \quad 0 = -b + 1$$

$\Rightarrow$

$$a = b = c = 1$$

Den dimensjonsløse gruppen $\Pi_2 = \frac{DV\rho}{\mu}$ kalles som kjent Reynoldstallet, Re .

b)

Like Reynoldstall gir

$$\frac{\rho V_1 D_1}{\mu} = \frac{\rho V_2 D_2}{\mu} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{D_2}{D_1}$$

Siden $\Pi_1 = \Phi(\Pi_2)$ har vi da samtidig like Strouhallet:

$$\frac{2\pi f_1 D_1}{V_1} = \frac{2\pi f_2 D_2}{V_2}$$

Og dermed, når vi også bruker det vi fant for like Reynoldstall:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{V_1}{V_2} \frac{D_2}{D_1} = \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^2 = \left(\frac{5}{7} \right)^2 = \frac{25}{49} \approx 0.51$$

c)

Similaritetskrav ved modellforsøk: Ved bevegelse på en væskeoverflate krever vi vanligvis like Froudetall (eksempelvis for skip), ved fullt neddykket bevegelse (eksempelvis for undervannsbåter) krever vi vanligvis like Reynoldstall.

Fysisk forklaring: Froudetallet er et mål for størrelsen av tyngdeeffekter. En bølge følger et overflateskip på grunn av vannet som blir presset unna og delvis løftet, og bølger involverer tyngdekrefte. Slike gir oftest den dominerende motstanden for overflateskip. Ved fullt neddykket bevegelse har vi ikke noen slik bølgedannelse; viskøse motstandskrefter blir dominerende, og Reynoldstallet er nettopp et mål for størrelsen av viskøse effekter.

5.

a)

Kravene for at Laplacelikninga $\nabla^2\Phi = 0$ skal være oppfylt, er kontinuitet ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) og virvelfrihet ($\boldsymbol{\xi} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$), men bare det første kravet er oppfylt. Laplacelikninga er altså ikke oppfylt, fordi hastighetspotensialet ϕ ikke eksisterer.

b)

Bruk definisjonene av kartesiske komponenter i 2D som deriverte av en strømfunksjon $\psi(x, y)$:

$$\begin{aligned}u &= \frac{\partial\psi}{\partial y} = -2Ky \\v &= -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2Kx\end{aligned}$$

x og y er uavhengige variable. Hvis vi integrerer likninga for u mhp. y , så oppstår en integrasjonskonstant som er en funksjon av x , fordi x og y er uavhengige variable:

$$\psi(x, y) = \int u \, dy = -Ky^2 + f(x)$$

Bestem $f'(x)$ ved innsetting i uttrykket for v , der påfølgende integrasjon gir konstanten C :

$$2Kx = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -(0 + f'(x)) \quad , \quad f(x) = \int f'(x) \, dx = -\int 2Kx \, dx = -Kx^2 + C$$

Strømfunksjonen er altså

$$\psi(x, y) = -K(x^2 + y^2) = -Kr^2$$

fordi vi må kreve $C = 0$: ψ er et mål for strømmen mellom en strømlinje og origo. Legg en strømlinje gjennom et punkt som vi lar rykke nærmere og nærmere origo; i grensen må punktet ha $\psi = \psi(0, 0) = 0$.

c)

ψ er konstant langs en strømlinje, dvs. vi har funnet at strømlinjene er kurver med konstant r . Det er i samsvar med at $v_r = 0$, ingen hastighet i radiell retning – fluiden flytter seg tangensielt og med konstant hastighet $v_t = 2Kr$.

d)

(Fra kartesiske uttrykk:) I første kvadrant er $u < 0$ og $v > 0$ når $K > 0$, og når strømlinjene er konsentriske sirkler ($\psi = \text{konstant}$) så blir fortegnene konsistent med de pilretningene som er tegna på figuren. (Eller fra polarkoordinatuttrykkene:) Når $v_t > 0$ betyr det bevegelse i positiv Θ -retning, som vist på figuren.

Hastighetsfeltet kan for eksempel beskrive en væske i *stivt-legeme-rotasjon* omkring origo, uten deformasjon.

