



Universitetet
i Stavanger

UNIVERSITETET I STAVANGER

Eksamen i

15. MAI 2006

BIT260 Fluidmekanikk

Kortfattet løsningsforslag

1.

a)

For den projiserte flaten:

$$F_h = \rho g h_c A = s \rho_{\text{vann}} g \left(h + \frac{1}{2} R \right) b R = 0.841 \times 998 \times 9.807 \left(1 + \frac{1}{2} 1 \right) 2 \times 1 \text{ N} = 24.7 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} h_p &= h_c + \frac{I_c}{h_c A} = h + \frac{1}{2} R + \frac{1}{12} \frac{b R^3}{\left(h + \frac{1}{2} R \right) b R} = \frac{h^2 + h R + \frac{1}{3} R^2}{h + \frac{1}{2} R} \\ &= \frac{1 + 1 + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2}} \text{ m} = \frac{14}{9} \text{ m} = 1.56 \text{ m} \end{aligned}$$

b)

Vekt av overliggende vannvolum:

$$\begin{aligned} F_v &= \rho g \left[b \left(h + R \right) R - \frac{1}{4} \pi b R^2 \right] = s \rho_{\text{vann}} g b R \left[h + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) R \right] \\ &= 0.841 \times 998 \times 9.807 \times 2 \times 1 \left(1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) 1 \right) \text{ N} = 20.0 \text{ kN} \end{aligned}$$

c)

Dreiemomentbidraget fra kraften på hvert enkelt infinitesimalt delareal på sylinderflaten blir lik 0 siden kraften alltid peker mot akse. Da må totalt dreiemoment også bli lik 0.

d)

Betingelsen $F_v x_p - F_h (R + h - h_p) = 0$, dvs. totalt dreiemoment lik 0, gir:

$$x_p = (h + R - h_p) \frac{F_h}{F_v} = \frac{\frac{1}{2} R \left(h + \frac{1}{3} R \right)}{h + \frac{1}{2} R} \times \frac{h + \frac{1}{2} R}{h + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) R} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) 1} \text{ m} = 0.549 \text{ m}$$

2.

Start med å velge kontrollvolum som omslutter alt vannet inni selve rørkneet, dvs. med størrelse V . Velg et aksekors med x -aksen i innkommende strøms retning og z -akse vertikalt oppover. Kraften $-\mathbf{F}$ vil virke på vannet i kontrollvolumet, når $\mathbf{F} = (F_h, F_v)$ er kraften som vannet utøver på rørkneet, med F_h i x -retning og F_v i z -retning.

Med A og V henholdsvis indre tverrsnitt og strømhastighet, får man:

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} (0.1)^2 \text{ m}^2 = 0.007854 \text{ m}^2$$

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{0.03}{\frac{\pi}{4} (0.1)^2} \text{ m/s} = 3.820 \text{ m/s}$$

a)

VS og HS av impulsstats horisontalt: $\Sigma F_x = p_1 \frac{\pi}{4} D^2 + (-F_h)$

$$\rho Q(V_{x,\text{ut}} - V_{x,\text{inn}}) = \rho_{\text{vann}} \frac{\pi}{4} D^2 V(0 - V) = -\rho_{\text{vann}} \frac{\pi}{4} D^2 V^2$$

Til sammen:

$$\begin{aligned} F_h &= p_1 \frac{\pi}{4} D^2 + \rho_{\text{vann}} \frac{\pi}{4} D^2 V^2 = p_1 \frac{Q}{V} + \rho QV \\ &= Q \left(\frac{p_1}{V} + \rho V \right) = 0.03 \left(\frac{10903}{3.820} + 998 \times 3.820 \right) \text{ N} = 200.0 \text{ N} \end{aligned}$$

b)

Konstant D gir konstant V med approksimasjonen inkompressibel fluid. Vi trenger derfor ikke mobilisere Bernoulli, siden trykkforandringen mellom de to nivåene blir rent statisk (det ville også følge direkte hvis man brukte Bernoulli):

$$p_2 - p_1 = \rho gh = 998 \times 9.807 \times 0.409 \text{ Pa} = 4.00 \text{ kPa}$$

c)

HS av impulsstats vertikalt:

$$\rho Q(V_{z,\text{ut}} - V_{z,\text{inn}}) = \rho_{\text{vann}} \frac{\pi}{4} D^2 V(-V - 0) = -\rho_{\text{vann}} \frac{\pi}{4} D^2 V^2 \quad (\text{som for horisontalt})$$

Når VS (kraftsummen vertikalt) beregnes, må tyngden av vannet tas med. Men en liten omskriving forenkler tallregningen, se uttrykket $\mathcal{V} = (\pi/4)D^2 h$ i oppgaveteksten:

$$\begin{aligned} \Sigma F_z &= p_2 \frac{\pi}{4} D^2 + (-F_v) - \rho g \mathcal{V} \\ &= p_1 \frac{\pi}{4} D^2 + (-F_v) + \frac{\pi}{4} D^2 (p_2 - p_1 - \rho gh) \\ &= p_1 \frac{\pi}{4} D^2 - F_v \end{aligned}$$

Altså igjen samme resultat som under punkt a) når vi bruker formelresultatet fra punkt b), bare med F_h erstattet med F_v . (Hvis man eksplisitt setter inn den oppgitte tallverdien for $\mathcal{V}$ fra oppgaveteksten samt tallverdien for $(p_2 - p_1)$ funnet under punkt b), får man selvsagt samme resultat.) De to komponentene har altså samme størrelse. Kraften $\mathbf{F}$ er rettet 45° oppover mot høyre i figuren i oppgaveteksten, for denne spesielle utformingen av vertikalt rørkne:

$$F_v = F_h = 200.0 \text{ N}$$

3.

a)

For et overflateskip vil bølgemotstand være en dominerende motstandskraft, dvs. tyngdekrefter er viktigst. Similaritetskriteriet blir at Froudetallene må være like:

$$(\text{Fr})_p = (\text{Fr})_m$$

$$V_m = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} V_p = \sqrt{\frac{3}{170}} \times 40.65 \text{ km/h} = 5.40 \text{ km/h} = 1.50 \text{ m/s}$$

b)

$$\text{Fr} = \frac{V_m}{\sqrt{gL_m}} = \frac{1.50}{\sqrt{9.807 \times 3}} = 0.277$$

c)

For Π_2 (se uttrykksoppramsingen side 1 for σ 's dimensjon):

$$M^0 L^0 T^0 = \left(\frac{L}{T} \right)^a (L)^b \left(\frac{M}{L^3} \right)^c \left(\frac{M}{T^2} \right)^1$$

$$\begin{array}{lll} M : & 0 & = c + 1 \\ L : & 0 & = a + b - 3c \\ T : & 0 & = -a - 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad a = -2, b = c = -1$$

Dermed:

$$\Pi_2 = \frac{\sigma}{V^2 D \rho} = 1 \left/ \left(\frac{V}{\sqrt{\sigma/\rho D}} \right)^2 \right. = (\text{Wb})^{-2} \quad (\text{som skulle vises})$$

d)

Med notasjonen i oppgaveteksten har vi altså:

$$\Phi(1/\text{Re}, 1/(\text{Wb})^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(\text{Wb})^2} = \tilde{\Phi}\left(\frac{1}{\text{Re}}\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Wb} = \frac{V}{\sqrt{\sigma/\rho D}} = \tilde{\Phi}(\text{Re})$$

Avslutningsvis skal vi tillate oss å “slurve” med notasjonen og fjerne bølgene, siden Φ er en uspesifisert funksjon som ikke følger av dimensjonsanalysen men må bestemmes eksperimentelt. Dermed har vi følgende uttrykk for stighastigheten til luftboblen, som bør være korrekt i den grad samtlige relevante fysiske variable ble inkludert fra starten:

$$V = \Phi(\text{Re}) \sqrt{\frac{\sigma}{\rho D}}$$

4.

a)

Sirkulasjonen, beregnet for gitt r :

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{u} \cdot d\mathbf{L} = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} u_t r d\phi = r f(r) \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi = 2\pi r f(r)$$

Stokes' sats sier at dette integralet samtidig er lik integralet av ξ over hele flaten innafor sirkelen (med origo som et singulært punkt). Hvis $\xi = 0$, så må altså Γ bli uavhengig av sirkelradien. Det oppnår vi såfremt (selvsagt ikke uten sammenheng med valget av $f(r)$ i resten av punktene i oppgaven!)

$$f(r) \propto \frac{1}{r}$$

b)

Er kontinuitetskravet oppfylt?

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_t}{\partial \theta} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ja!}$$

c)

Hva med virvlingsfriheten?

$$\xi = \frac{\partial v_t}{\partial r} + \frac{v_t}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{OK, } \Phi \text{ eksisterer!}$$

d)

(Tegn sjøl!) Strømlinjene blir konsentriske sirkler om origo, siden $v_r = 0$. Hastighetspilene peker i positiv dreieretning – sjekk sjøl at $K > 0$ lar v_t peke i den retningen. (Den rent sirkulerende strømmen med en slik $f(r)$ kalles en *fri virvel* eller av og til *virveltråd*.)

e)

Ta skalarproduktet av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{r}$ i et vilkårlig punkt utafor origo, samt regn ut $\mathbf{u}$'s absoluttverdi:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = ux + vy = \frac{K}{r}(-yx + xy) = 0; \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\frac{K^2}{r^4}(x^2 + y^2)} = \sqrt{\frac{K^2}{r^2}} = |v_t|$$

Siden altså $\mathbf{u} \perp \mathbf{r}$ overalt, så må $v_r = 0$, og strømmen blir rent sirkulerende, med samme r -avhengighet som ovenfor. Siden $K > 0$ gir $u < 0$ og $v > 0$ i første kvadrant, ser vi at dreieretningen er eksplisitt positiv. Altså samme hastighetsfelt som i punktene ovenfor – som vi ble bedt om å vise.

5.

a)

Slik denne oppgaven er formulert, kan vi straks skrive opp uttrykket som gir en sammenheng mellom f og V , uten å starte med energilikningen:

$$\frac{h_f}{L} = f \frac{1}{D} \frac{1}{2g} V^2$$

Omform uttrykket til (med SI-enhetene undertrykt i notasjonen)

$$fV^2 = \frac{h_f}{L} 2gD = \frac{1.5}{250} \times 2 \times 9.807 \times 0.5 = 0.05884$$

eller:

$$V = \frac{0.2426}{\sqrt{f}}$$

Det er smart og arbeidsbesparende med tanke på iterasjonene å sette inn for V i definisjonen av Reynoldstall, slik at man får det andre uttrykket som det spørres etter:

$$\text{Re} = \frac{DV}{\nu} = \frac{0.5 \times 0.2426}{1.003 \times 10^{-6}} \frac{1}{f^{1/2}} = \frac{120920}{f^{1/2}}$$

b)

Iterer Re-relasjonen ved hjelp av Moody-diagrammet. Med antagelsen om glatt rør starter man ofte iterasjonene med en f -verdi omtrent midt i Moody-diagrammet, men fra relasjonen i punkt a) ser man at Reynoldstallet blir forholdsvis stort, så velg heller en f som tilsvarer Reynoldstall til høyre for midten for å få raskere konvergens. Ta tipset fra oppgaveteksten og sett $f_{\text{start}} = 0.01$. Med den sedvanlige diskutabile avlesningsnøyaktigheten gir det:¹

It. #	1	2	3
f_{inn}	0.01	0.0114	0.0115
Re	1209200	1132500	1127600
f_{ut}	0.0114	0.0115	0.0115

Med en viss unøyaktighet i siste desimal har vi altså funnet:

$$f = 0.0115$$

c)

Volumstrømraten (med siste “gjeldende siffer” ganske usikkert):

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2 V = \frac{\pi}{4} (0.5)^2 \frac{0.2426}{\sqrt{0.0115}} \text{ m}^3/\text{s} = 0.444 \text{ m}^3/\text{s}$$

¹ Eventuelle nøyaktigere avlesninger enn faglærerens er tillatt!