

Kortfattet løsningsforslag¹

1.

a)

For den projiserte flata:

$$F_h = \rho g h_c A = \rho_{\text{vann}} g (H + R) \pi R^2 = 998 \times 9.81 (0.3 + 0.2) \pi (0.2)^2 \text{ N} = 615 \text{ kN}$$

b)

Dybde til resultatkraftas angrepspunkt:

$$h_p = h_c + \frac{I_c}{h_c A} = H + R + \frac{\frac{1}{4} \pi R^4}{(H + R) \pi R^2} = \left(0.3 + 0.2 + \frac{1}{4} \frac{(0.2)^2}{0.3 + 0.2} \right) \text{ m} = \frac{13}{25} \text{ m} = 0.52 \text{ m}$$

c)

Arkimedes' lov kan brukes her selv om det ikke er vann på den vertikale høyresida (som ikke får vertikale krefter), fordi det er en ubrutt vannsøyle på venstre side mellom underside og overside:

$$F_v = \rho_{\text{vann}} g \pi R^2 L = 998 \times 9.81 \times \pi \times (0.2)^2 \times 0.04878 \text{ N} = 60.0 \text{ N}$$

d)

Oppdrifta går gjennom volumsenteret av den fortrenge væskemengden, som i dette tilfellet ligger i avstand $L/2$ fra veggplanet:

$$x_p = \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} \times 0.04878 \text{ m} = 2.44 \text{ cm}$$

2.

a)

$\mathbf{F} = (F_{\parallel}, F_{\perp})$ defineres å virke på strålesplitteren, slik at $-\mathbf{F}$ virker på vannet og er den størrelsen som inngår i impulssetningen. La kontrollvolumet omslutte den vannmengden som er vist i figuren i oppgaveteksten. Det er hensiktsmessig å bruke gaugetrykk i regninga siden atmosfæretrykket inngår overalt, og $p_{\text{atm, gauge}} = 0$, dvs. alle trykklidrag i impulssetningen faller ut. Impulssetningen tar da formen

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{F})^{\text{på vann}} &= -\mathbf{F} \\ &= \rho_{\text{vann}} Q_2 \mathbf{V}_2 + \rho_{\text{vann}} Q_3 \mathbf{V}_3 - \rho_{\text{vann}} Q_1 \mathbf{V}_1 \\ &= \rho_{\text{vann}} Q_1 \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 \right) \end{aligned}$$

dvs.

$$\mathbf{F} = \rho_{\text{vann}} Q_1 \mathbf{V}_1 = \frac{\pi}{4} \rho_{\text{vann}} D^2 V_1^2 \hat{\mathbf{e}}_1$$

fordi $\mathbf{V}_2$ og $\mathbf{V}_3$ er like store og motsatt rettede vektorer, og $Q_2 = Q_3 = Q_1/2$. Enhetsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_1$ peker i bevegelsesretninga til innkommende stråle.

¹For å få selve oppsettet bedre leselig er avrundete verdier for ρ_{vann} og g vist i løsningene, men de nøyaktigere tallverdiene fra oppgaveteksten (998.2 og 9.80665) ble brukt i de aktuelle tallregningene.

a)

Kraft i positiv innkommende stråleretning:

$$F_{\parallel} = \frac{\pi}{4} \rho_{\text{vann}} D^2 V_1^2 = \frac{\pi}{4} \times 998 \times (0.09)^2 \times (16.6)^2 \text{ N} = 1.75 \text{ kN}$$

b)

Alle komponentene av de to utløpende impulsstrømraterne ($\rho_{\text{vann}} Q_2 \mathbf{V}_2$ og $\rho_{\text{vann}} Q_3 \mathbf{V}_3$) nuller hverandre ut, som vist ovenfor, og innkommende impulsstrømrater har pr. definisjon ingen transversale bidrag. Da kan impulssetningen ikke inneholde transversale kraftkomponenter.

c)

Betrakt kontrollvolumet som defineres av vannet i figuren. For en tapsfri strøm og ingen andre bevegelige objekter enn strålene, må kinetisk energi inn være lik kinetisk energi ut. Hvis man trekker to strømlinjer fra oppstrøms strømtverrsnitt, en til hvert nedstrøms strømtverrsnitt, så har begge samme trykk ved innløpet og samme trykk ved utløpet. Med alle høydenivåer like, og de to innløpende hastighetene i strømlinjene like, så gir Bernoullis likning at $|\mathbf{V}_1| = |\mathbf{V}_2| = |\mathbf{V}_3|$ (skjønt bare tilnærmet, for energitap er neglisjert).

3.

a)

Med den valgte startverdien $f_{\text{start}} = 0.020$ for $\epsilon/D = 0.001$, kan Re-relasjonen itereres med innsetting i Moodydiagrammet til å gi (med diskutabel avlesningsnøyaktighet):

f	0.020	0.0223	0.0225
Re	105147	99577	99133
f	0.0223	0.0225	0.0225

V-relasjonen gir deretter, med tilstrekkelig nøyaktighet:

$$V = \frac{0.1502}{\sqrt{0.0225}} \text{ m/s} = 1.00 \text{ m/s}$$

c)

Tapseffekten:

$$P_{\text{tap}} = \rho g q h_L = \frac{\pi}{4} \rho_{\text{vann}} g D^2 V h_L = \frac{\pi}{4} \times 998 \times 9.81 \times (0.1)^2 \times 1.0 \text{ W} = 76.9 \text{ W}$$

4.

a)

Hastighetsfeltet må være kontinuerlig for at ψ skal eksistere, så når en strømfunksjon er oppgitt må vi vente at kontinuitet er til stede. De kartesiske hastighetskomponentene er:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x + 2 \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2y \end{aligned}$$

Divergensen viser seg å ha verdien som bekrefter at hastighetsfeltet er kontinuerlig:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial(2x+2)}{\partial x} + \frac{\partial(-2y)}{\partial y} = 2 - 2 = 0$$

b)

For at $\phi(x, y)$ skal eksistere, må virvlinga ξ til hastighetsfeltet være lik 0. Og ved beregning viser det seg at $\xi = 0$, slik at ϕ eksisterer:

$$\xi = (\nabla \times \mathbf{u})_z = \frac{\partial(-2y)}{\partial x} - \frac{\partial(2x+2)}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

c)

Integrasjon av strømlinjelikninga, med C_1 og C_2 konstanter:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{2x+2} &= \frac{dy}{-2y} \\ \ln(x+1) &= -\ln y + C_1 \\ (x+1)y &= C_2 \quad (C_2 = e^{C_1})\end{aligned}$$

At kurven skal gå gjennom $(0, 2)$, gir $C_2 = 2$, og likninga blir:

$$y = \frac{2}{x+1}$$

Dette er en hyperbel med $x = -1$ og $y = 0$ som asymptoter (tegn figuren sjøl!). Siden $u > 0$ og $v < 0$ i første kvadrant, skal påsatt pilretning vise at strømmen går ovenfra og nedover mot høyre.

5.

a)

For neddykket bevegelse brukes vanligvis like Re (Reynoldstall), for overflatebevegelse like Fr (Froudetall), ved dynamisk similaritet.

b)

Reynoldstallet er forholdet mellom treghetskraft og viskøs kraft, Froudetallet er kvadratrot av forholdet mellom viskøs kraft og tyngdekraft. Ved overflatebevegelse antar man som første tilnærming at motstandskrafta som skyldes bølgedannelsen (som er et tyngdefenomen) er viktigere enn den viskøse krafta. Ved neddykket bevegelse fås ikke bølgedannelse, og viskøs kraft vil være viktigst.

c)

I det første uttrykket er det dimensjon L/T (hastighetsdimensjonen) på begge sider av likninga. I det andre uttrykket, som definerer en dimensjonsløs gruppe, er begge sider av likninga dimensjonsløse.

d)

Uttrykket i oppgaveteksten står for det turbulente hastighetsprofil i et rør, se avsnitt 8.11 i læreboka vi brukte. I to områder i strømtverrsnittet er det fysisk helt feil, om det så stemmer ganske bra i resten av tverrsnittet:

- I det tynne *viskøse subsjiktet* ved røyrveggen, der de dominerende viskøse kreftene gir opphav til et lineært hastighetsprofil. (Samtidig som det oppgitte uttrykket går logaritmisk mot ∞ der, og blir derfor også matematisk ubrukelig.)
- Ved *røraksen*, der det har en "spiss", mens man fysisk sett har $\partial u / \partial r = 0$ der.