Universitetet i Stavanger

UNIVERSITETET I STAVANGER 17. NOVEMBER 2008

Eksamen i **BIT260 Fluidmekanikk**

Kortfattet løsningsforslag

1.

a)
Gaugetrykket $p_{\mathrm{H,gauge}}$ i flaska i nivå H over bunnen følger fra statisk trykkligning anvendt på manometeret:

$$p_H - p_{\mathrm{atm}} = -s_{\mathrm{ch}}\rho_{\mathrm{vann}} g\tilde{h} - s_{\mathrm{Hg}}\rho_{\mathrm{vann}} g(-h)$$

Det gir ca. 0.12 atm:

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{H,gauge}} &= \rho_{\mathrm{vann}} g(s_{\mathrm{Hg}} h - s_{\mathrm{ch}}\tilde{h}) \\ &= 998.2 \times 9.80665 \times (13.56 \times 0.10 - 0.96 \times 0.05)\,\mathrm{Pa} = 12.80\,\mathrm{kPa} \end{aligned}$$

b)
La W være tyngden av champagnen nedenfor målernivået:

$$\begin{aligned} W &= s_{\mathrm{ch}}\rho_{\mathrm{vann}} g \left(\pi r^2 H - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3\right) \\ &= \pi s_{\mathrm{ch}}\rho_{\mathrm{vann}} g r^2 \left(H - \frac{2}{3} r\right) \\ &= \pi \times 0.96 \times 998.2 \times 9.80665 \times (0.05)^2 \left(0.15 - \frac{2}{3}0.05\right)\,\mathrm{N} \\ &= 8.61\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

c)
Netto kraft K mot flaskebunnen fås fra statisk likevekt av champagnen under målernivået:

$$\begin{aligned} K &= \pi r^2 p_{\mathrm{H,gauge}} + W \\ &= \left(\pi(0.05)^2 12.80 \times 10^3 + 8.61\right)\,\mathrm{N} \\ &= (100.56 + 8.61)\,\mathrm{N} = 109.2\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

2.

a)
Legg et kontrollvolum inni dysen. Hvis F_x (definert positiv i strømretningen som velges som x-retning) er kraftkomponent i strømretningen som overføres fra vannet til dysen, så blir $-\boldsymbol{F}_x$ kraften overført til vannet. Impulssats og kontinuitetsligning gir:

$$-F_x + p_{1,\mathrm{g}}\frac{\pi}{4}D_1^2 - p_{2,\mathrm{g}}\frac{\pi}{4}D_2^2 = \rho\frac{\pi}{4}D_1^2 V_1(V_2 - V_1) \qquad (p_{2,\mathrm{g}} = p_{\mathrm{atm,g}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0)$$

$$V_1\frac{\pi}{4}D_1^2 = V_2\frac{\pi}{4}D_2^2$$

Sammenholdt:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\pi}{4}D_1^2\left[p_{1,\mathrm{g}} - \rho V_1^2\left((\frac{D_1}{D_2})^2 - 1\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{4}(0.12)^2\left[400000 - 998.2(4.0)^2\left((\frac{0.12}{0.06})^2 - 1\right)\right]\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

$$= \quad 3.982\,\mathrm{kN} \qquad \text{(dvs. vannet skyver selve dysen i stråleretningen)}$$

b) Tapshead, direkte fra energiligningen ("Bernoullis ligning med tapsledd"):

$$\begin{aligned}
h_L &= \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}(V_1^2 - V_2^2) \\
&= \frac{p_{1,\mathrm{g}}}{\rho g} - \frac{1}{2g}V_1^2\left((\frac{D_1}{D_2})^4 - 1\right) \\
&= \left[\frac{400\cdot 10^3}{998.2\cdot 9.80665} - \frac{1}{2\cdot 9.80665}(4.0)^2\left((\frac{0.12}{0.06})^4 - 1\right)\right]\ \mathrm{m} \\
&= (40.86 - 12.24)\,\mathrm{m} \\
&= 28.63\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Kommentar:
Man kan sjekke at en slik verdi for h_L ville forutsette tapskoeffisientverdien $k_n \approx 2.2$. Altså godt og vel en størrelsesorden verre enn den vanlige 0.04 – 0.2 (se læreboka). Denne dysen måtte vært spesielt konstruert for å gi tap!

c)
I uttrykket for P_{tap} innføres $Q = \frac{\pi}{4}D^2V$. Tapsenergi i dysen pr. tidsenhet blir da:

$$P_{\mathrm{tap}} = \frac{\pi}{4}\rho_{\mathrm{vann}} g D_1^2 V_1 h_L = \frac{\pi}{4} \times 998.2 \times 9.80665 \times (0.12)^2 \times 4.0 \times 28.63\,\mathrm{W} = 12.68\,\mathrm{kW}$$

3.

Anta (siden ikke noe annet er sagt) at bevegelsen foregår så langt under væskeoverflaten at ingen overflatebølgeefekter opptrer, dvs. at tyngdekrefter ikke blir viktige for vannstrømmen omkring legemet sammenlignet med de viskøse kreftene. Similaritetskravet blir da like Reynoldstall.

a)
$(\mathrm{Re})_m = (\mathrm{Re})_p \quad \Rightarrow$

$$\frac{V_m D_m}{\nu_m} = \frac{V_p D_p}{\nu_p}$$

$$V_m = \frac{D_p}{D_m}\frac{\nu_m}{\nu_p}V_p = \frac{1}{\lambda}\frac{\nu_m \rho_p}{\mu_p}V_p = \frac{1}{\lambda}\frac{\nu_m s_p \rho_{\mathrm{vann}}}{\mu_p}V_p = \frac{1}{6.5}\frac{1.003\cdot 10^{-6}\cdot 0.833\cdot 998.2}{0.0287}\,15\,\mathrm{m/s} = 6.71\,\mathrm{cm/s}$$

b)
Bruk den grunnleggende definisjonen av Reynoldstall som forholdet mellom treghetskraft og viskøs kraft. Dragkraften representerer den viskøse kraften:

$$\frac{F_{Im}}{F_{Vm}} = \frac{F_{Ip}}{F_{Vp}}$$

$$\begin{aligned}
F_{Vp} &= \frac{\rho_p V_p^2 L_p^2}{\rho_m V_m^2 L_m^2}F_{Vm} = \frac{\rho_m}{\rho_p}\left(\frac{\mu_p}{\nu_m \rho_m}\right)^2\left(\frac{(\mathrm{Re})_p}{(\mathrm{Re})_m}\right)^2 F_{Vm} \\
&= \frac{998.2}{0.833\cdot 998.2}\left(\frac{0.0287}{1.003\cdot 10^{-6}\cdot 998.2}\right)^2\cdot 1^2\cdot 3.5\,\mathrm{N} = 3.45\,\mathrm{kN}
\end{aligned}$$

4.

a)
Hastigheten er rent tangensiell, dvs. langs en sirkel om origo med radius r og polarvinkel θ vil det differensielle bueelementet $d\boldsymbol{L}$ være parallelt med $\boldsymbol{u}$:

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{L} = \oint_L v_t\, dL = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r} r\, d\theta = \frac{\gamma}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \;=\; \gamma$$

Sirkulasjonen er altså en konstant, uavhengig av radien i sirkelen.

b)
Divergensen av hastigheten:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial r}(0) + \frac{0}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r}\right) = 0 + 0 + 0 \;=\; 0$$

Siden divergensen er lik null, er kontinuitetsligningen for en inkompressibel ideell fluid oppfylt.

c)
Virvlingen:

$$(\nabla\times\boldsymbol{u})_z = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(0) = \frac{\gamma}{2\pi}\left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}\right) - 0 \;=\; 0$$

Utafor origo, som er et singulært punkt, er hastighetsfeltet virvlingsfritt. Da må det eksistere et hastighetspotensial som har hastighetsvektoren til gradient. Konvensjonsmessig som oftest med minusfortegn (men det finnes lærebøker som bruker plussfortegn).

d)
Differansen mellom sirkulasjonene for to sirkler med forskjellig diameter er ifølge *Stokes' teorem* gitt ved integralet av ξ over flaten mellom sirklene. Når $\xi = 0$ utafor origo, som vist under punkt c), så er det konsistent med at vi fant under a) at Γ er uavhengig av sirkelradien.

5.

a)
Friksjonsfaktoren for vann finnes ved å invertere uttrykket for h_L:

$$\begin{aligned} f_{\text{vann}} &= \left(\frac{h_L}{L}\right)_{\text{vann}} \Big/ \left(\frac{1}{D}\frac{V^2}{2g}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{h_L}{L}\right)_{\text{vann}}\frac{gD^5}{Q^2} \;=\; \frac{\pi^2}{8} 0.0003\frac{9.80665(0.6)^5}{(0.1)^2} \;=\; 0.0282 \end{aligned}$$

b)
Et hovedpoeng i oppgaven er at vannstrømmen er turbulent, mens glyserolstrømmen er laminær:

$$\text{Re}_{\text{vann}} \;=\; \frac{4}{\pi}\left(\frac{\rho Q}{D\mu}\right)_{\text{vann}} \;=\; \frac{4}{\pi}\left(\frac{Q}{D\nu}\right)_{\text{vann}} \;=\; \frac{4}{\pi}\frac{0.1}{0.6\cdot 1.003\cdot 10^{-6}} \;=\; 211570$$

$$\text{Re}_{\text{glyserol}} \;=\; \frac{\nu_{\text{vann}}}{\nu_{\text{glyserol}}}\text{Re}_{\text{vann}} \;=\; \frac{1.003\cdot 10^{-6}}{1.188\cdot 10^{-3}} 211570 \;=\; 178.6$$

c)
For glyserol kan uttrykket for laminær friksjonsfaktor brukes:

$$f_{\text{glyserol}} \;=\; \frac{64}{\text{Re}_{\text{glyserol}}} \;=\; \frac{64}{178.6} \;=\; 0.358$$