

Kortfattet løsningsforslag1.

a)

Hvis inkompressibel fluid og konstant indre rørtverrsnitt, vil høyre Hg-søyle stige like mye som venstre faller, pga. kontinuitet. Derfor vil den nye Hg-nivå differansen bli dobbelt så stor som fallhøyden til venstre Hg-søyle.

b)

$$p_A = p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}} \rho_{\text{vann}} g \Delta h_1 - \rho_{\text{vann}} g \Delta H_1$$

c)

$$\begin{aligned} 2p_A &= p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}} \rho_{\text{vann}} g \Delta h_2 - \rho_{\text{vann}} g \Delta H_2 \\ &= p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}} \rho_{\text{vann}} g (\Delta h_1 + 2x) - \rho_{\text{vann}} g (\Delta H_1 + x) \end{aligned}$$

d)

Multipliser ligningen fra b) med (-2) og den fra c) med 1. Legg dem sammen; da forsvinner p_A , og tilbake står et resultat som kan løses mhp. x :

$$0 = p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}} \rho_{\text{vann}} g (\Delta h_1 - 2x) - \rho_{\text{vann}} g (\Delta H_1 - x)$$

$$x = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{vann}} g (2s_{\text{Hg}} - 1)} + \frac{s_{\text{Hg}} \Delta h_1 - \Delta H_1}{2s_{\text{Hg}} - 1}$$

e)

Med innsatte tallverdier:

$$\begin{aligned} \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{vann}} g (2s_{\text{Hg}} - 1)} &= 0.3994 \text{ m} \\ \frac{s_{\text{Hg}} \Delta h_1 - \Delta H_1}{2s_{\text{Hg}} - 1} &= -0.1394 \text{ m} \end{aligned}$$

Følgelig:

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 + 2x = 0.620 \text{ m}$$

2.

Fra hydrostatikkens grunnligning¹, Bernoullis ligning, og kontinuitetsligningen:

$$p_1 - p_2 = (s_{\text{Hg}} - 1) \rho_{\text{vann}} g h_m$$

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho_{\text{vann}} g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 &= \frac{p_2}{\rho_{\text{vann}} g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L, \quad h_L = k_v \frac{V_2^2}{2g} \\ \frac{\pi}{4} D^2 V_1 &= \frac{\pi}{4} d^2 V_2 \end{aligned}$$

¹ Resultatet framkom ved integrasjon nedover i venstre søyler og så oppover i høyre søyler:

$$p_2 - p_1 = -\rho_{\text{vann}} g \{-(L_1 + h_m)\} - s_{\text{Hg}} \rho_{\text{vann}} g \{-L_2\} - s_{\text{Hg}} \rho_{\text{vann}} g \{+(L_2 + h_m)\} - \rho_{\text{vann}} g \{+L_1\}$$

Kombinert:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2(s_{\text{Hg}} - 1)gh_m}{(\frac{D}{d})^4(1 + k_v) - 1}}, \quad V_2 = (\frac{D}{d})^2 V_1$$

a) For $k_v = 0$:

$$\begin{aligned} V_1 &= 1.42 \text{ m/s} \\ V_2 &= 8.85 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b) For $k_v = 0.296$:

$$\begin{aligned} V_1 &= 1.24 \text{ m/s} \\ V_2 &= 7.75 \text{ m/s} \end{aligned}$$

c) Tapseffekt (husk at hastigheten funnet under b) går sammen med $k_v \neq 0$):

$$P_{\text{tap}} = \rho_{\text{vann}} g Q h_L = \frac{\pi}{8} k_v \rho_{\text{vann}} d^2 V_2^3 = 86.5 \text{ W}$$

3.

$\mathbf{F} = (F_{\parallel}, F_{\perp})$ defineres å virke på skovbladet, slik at $-\mathbf{F}$ virker på vannet og altså er den størrelsen som inngår i impulssetningen. La kontrollvolumet omslutte den vannmengden som er vist i figuren i oppgaveteksten. Det er naturlig å velge gaugetrykk i regningen siden atmosfæretrykket inngår overalt, og $p_{\text{atm, gauge}} = 0$, dvs. alle trykklidrag i impulssetningen faller ut. Impulssetningen tar da formen

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{F})^{\text{på vann}} &= -\mathbf{F} \\ &= \rho_{\text{vann}} Q_2 \mathbf{V}_2 + \rho_{\text{vann}} Q_3 \mathbf{V}_3 - \rho_{\text{vann}} Q_1 \mathbf{V}_1 \\ &= \rho_{\text{vann}} Q_1 \left(\frac{1}{2} \mathbf{V}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 \right) \end{aligned}$$

dvs.

$$\mathbf{F} = \rho_{\text{vann}} Q_1 \mathbf{V}_1 = \frac{\pi}{4} \rho_{\text{vann}} D^2 V_1^2 \hat{e}_1$$

fordi $\mathbf{V}_2$ og $\mathbf{V}_3$ er like store og motsatt rettede vektorer, og $Q_2 = Q_3 = Q_1/2$. Enhetsvektoren $\hat{e}_1$ peker i retningen til innkommende stråle.

$$\text{a) Kraft i positiv innkommende stråleretning: } F_{\parallel} = \frac{\pi}{4} \rho_{\text{vann}} D^2 V_1^2 = 1.50 \text{ kN}$$

$$\text{b) Kraft tvers på innkommende stråleretning: } F_{\perp} = 0$$

4.

a)
Kontinuitetsbetingelsen

$$A_1 u_1 = A_2 u_2, \quad A \propto r^2$$

gir

$$r_0^2 V_0 = r^2(x) u(x)$$

eller

./.

$$r(x) = \sqrt{\frac{V_0}{u(x)}} r_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1 + \frac{2x}{L}}}$$

b)

For stasjonær strøm i 1D approksimasjon:

$$a(x) = u(x) \frac{d}{dx} u(x) = V_0 \left(1 + \frac{2x}{L}\right) V_0 \frac{2}{L} = \frac{2V_0^2}{L} \left(1 + \frac{2x}{L}\right)$$

c)

Tallverdier:

$$\begin{aligned} a(0) &= \frac{2V_0^2}{L} = 100.0 \text{ m/s}^2 \\ a(L) &= 3a(0) = 300.0 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

5.

a)

$$M^0 L^0 T^0 = [L][LT^{-1}]^a [ML^{-3}]^b [ML^{-1}T^{-1}]^c$$

$$\begin{aligned} M: \quad 0 &= b + c \\ L: \quad 0 &= 1 + a - 3b - c \\ T: \quad 0 &= -a - c \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a = b = 1, \quad c = -1$$

Den dimensjonsløse gruppen $\Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu}$ kalles som kjent Reynoldstallet, Re.

b)

Dynamisk similaritet hvis like Reynoldstall, siden det er en friksjonsdominert prosess:

$$\frac{\rho V_1 D_1}{\mu} = \frac{\rho V_2 D_2}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{7}{9} \approx 0.7778$$

c)

Sammenhengen mellom f , ρ , V , D og μ tilsvarer en ligning mellom de dimensjonsløse gruppene, $\Pi_1 = \tilde{f}(\Pi_2)$, hvor $\tilde{f}$ er en funksjon som må bestemmes eksperimentelt. Hvis to strømsituasjoner 1 og 2 er dynamisk similære ($\Pi_2(1) = \Pi_2(2)$), så har de derfor også samme verdi for Π_1 som ofte kalles Strouhallet, $\mathcal{S}$:

$$\frac{2\pi f_1 D_1}{V_1} = \frac{2\pi f_2 D_2}{V_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{D_2}{D_1} \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 = \frac{49}{81} \approx 0.6049$$