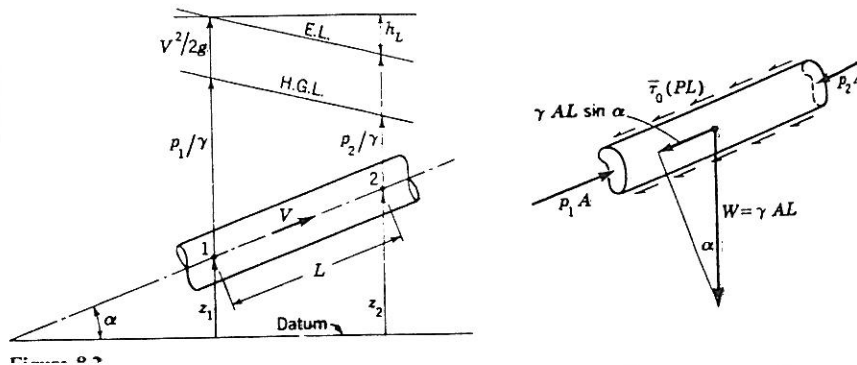


8.4 GENERELL LIKNING FOR RØRFRIKSJON

Vi ser på en stasjonær strømsituasjon som på figuren, og ønsker å finne h_L .



Den utledningen vil være helt analog til den i avsnitt 5.3 for tapsleddet i Bernoullis likning, hvor vi betraktet et "strømrør" omkring strømningen

$$h_f = \frac{2\bar{\tau}_0 L}{\rho g R}$$

$\tau_0 \rightarrow \bar{\tau}_0$,
gjennomsnittlig
skjærspenning

Hva er $\bar{\tau}_0$? Bruk dimensjonsanalyse!

Anta sammenhengen

$$\bar{\tau}_0 = f(\rho, \mu, V, R_h)$$

Π -teoremet, med ρ, R_h, V som primære variable, gir:

$$\Pi_1 = \mu \rho^{a_1} R_h^{b_1} V^{c_1}$$

$$\Pi_2 = \bar{\tau}_0 \rho^{a_2} R_h^{b_2} V^{c_2}$$

Bruk MLT-systemet og dimensjonene

$$\mu = \left[\frac{M}{LT} \right]$$

$$R_h = [L]$$

$$\bar{\tau}_0 = \left[\frac{M}{L T^2} \right]$$

$$V = \left[\frac{L}{T} \right]$$

$$\rho = \left[\frac{M}{L^3} \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 : (M) \quad 0 = 1 + a_1 \\ (L) \quad 0 = -1 - 3a_1 + b_1 + c_1 \\ (T) \quad 0 = -1 - c_1 \end{array} \right\} \quad a_1 = b_1 = c_1 = -1$$

som gir

$$\pi_1 = \frac{\mu}{\rho R_h V} = (Re)^{-1}$$

Med tilsvarende regning og potensbalansering for π_2 :

$$\pi_2 = \frac{\bar{\tau}_0}{\rho V^2}$$

Etter π -teoremet: $\pi_2 = \phi(\pi_1^{-1})$

$$\Rightarrow \quad \bar{\tau}_0 = \rho V^2 \phi(Re)$$

Med notasjonen $\phi(Re) = \frac{1}{2} C_f$ får $\bar{\tau}_0 = C_f \rho \frac{V^2}{2}$,
slik at

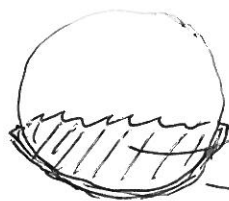
$$\boxed{h_f = C_f \frac{L}{R_h} \frac{V^2}{2g}}$$

Vi skal komme tilbake til at dette uttrykket gjelder også for ru rør.

(Merk:
Med hensyn til sluttresultatet vi skal finne i neste avsnitt, hadde det ikke vært nødvendig å innføre R_h her. Man kunne brukt D istedet.
Men av "historiske grunner" samt av hensyn til forenkling i notasjon, tok vi svingen innom R_h , selv om vi i neste avsnitt skal innføre D igjen.)

Eksplicit for $\bar{\tau}_0$:

$$\bar{\tau}_0 = \frac{1}{P} \int_0^P \tau_0 dP$$



Areal A

P (lengde av "fuktet periferi")

8.5 FRIKSJON I RØR MED SIRKULÆRT TVERRSNITT

Med innsetting av $R_h = \frac{1}{4}D$ samt

$$f = 4C_f = 8\phi(Re)$$

f_{as}

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Darcy-Weisbachs
likning

f er en dimensjonsløs funksjon av Reynoldstallet. Tapshøyden i et rør kan derfor uttrykkes ved hastighets høyden, såfremt f er en langsomt varierende funksjon.

ADVARSEL:

KONVEKSJONSFORVIRRING

Settebenfor

$$f = f_M \quad (M \equiv \text{Moody})$$

brukes ofte

$$f \rightarrow 4f = 4f_F \quad (F \equiv \text{Fanning})$$

h_f -uttrykket ^{kalles} da Fannings likning. Forbytting gir feil i forholdet 4:1!

Segg merke til at (8.6) kan skrives ("fullt" rør, sylindrisk)

$$h_f = \tau_0 \frac{L}{R_h \gamma} = \frac{\tau_0 2L}{r_0 \gamma}$$

Utleddningen (kapittel 4) var for en generell strømningebunt. Da har vi for vilkårlig radius (slikegones strøm!)

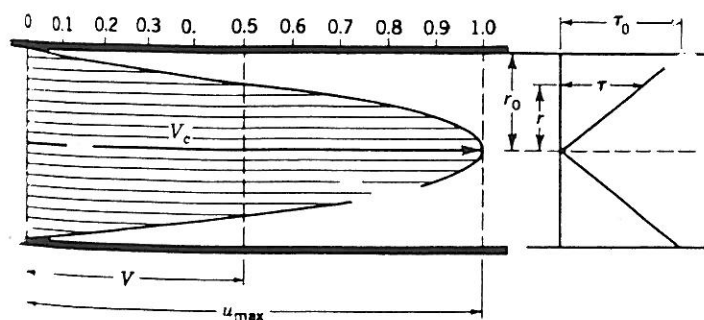
$$h_f = \frac{\tau 2L}{r \gamma}$$

Enten strømmingen er laminar eller turbulent, øker altså skjærspenningen lineært med avstanden fra røraksen:

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0}$$

OBS. Bare viskøs skjærspenning!

Dette er spesielt tilfelle for den laminære strømmingen vi tidligere har beskrevet.



Eliminer $\phi(Re)$ mellom $\bar{\tau}_0$ -uttrykket i 8.4 og f -uttrykket i 8.5:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_0 &= \frac{f}{4} \rho V^2 \\ f &= 8\phi \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\tau_0 = \frac{f}{4} \rho g \frac{V^2}{2g}$$

(Man undres om konversjonsforvirringen her nok med dette uttrykket å gjøre?) $f \sim \frac{1}{4}$ kan

8.6 FRIKSJON I IKKE-SIRKULÆRE RØR OG FØRINGER

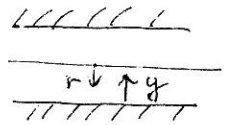
(Dette avsnittet om handler at man ofte erstatter $D \rightarrow 4R_h$

for å få forhåpentligvis brukbare uttrykk hvis røversnittet ikke er sirkulært. Vi må nevne det og kalle det pensum, siden det er i vanlig bruk, men til eksamen i år kan man gjerne glemme det!)

8.7 LAMINÆRSTRØM I SYLINDRISK RØR

Kombiner $h_f = \frac{\tau L}{r\gamma}$ med $\tau = \mu \frac{du}{dy}$, $y = r_0 - r$
og få:

$$du = - \frac{h_f \gamma}{2\mu L} r dr$$



Integrer, og bestem integrasjonskonstanten ved

$$r=0 \Rightarrow u = u_{\max} = V_c$$

$$\Rightarrow \boxed{u = u_{\max} - \frac{h_f \gamma}{4\mu L} r^2 = V_c \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)}$$

Jordli $r=r_0 \Rightarrow u=0$, og forandringen prop. med r^2 !

Hvis hastighetsprofilen integreres ^{over} tverrsnittet, kan middel-
hastigheten V finnes:

$$V = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{1}{2} V_c \quad (\text{fra tidligere kapittel})$$

[Den videre framstillingen i forelesning på dette punkt er litt rotet, så det er vanskelig å beholde oversikten. Vi gjør det litt annerledes her:]

$$2V = u_{\max} = \frac{h_f \gamma r_0^2}{4\mu L} = \frac{h_f \gamma D^2}{16\mu L}$$

$$\Rightarrow h_f = \frac{32\mu L V}{\gamma D^2} = 64 \left(\frac{\mu}{\gamma V D} \right) \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Jammen liken dette med Darcy-Weisbachs likning (avsnitt 8.5):

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Da har vi funnet at

$$\boxed{f_{\text{laminar}} = \frac{64}{Re}}$$

Dette kan brukes for $Re < 2000$.

Et av mellomtrinnene i utledninga kan skrives

$$h_f = 32 \nu \frac{L}{g D^2} V \quad (\text{Hagen-Poiseuilles lov})$$

Poengget her er at h_f for laminar strøm går som første potens av V . Men uttrykket er "mindre ryddig" enn Darcy-Weisbachs lov med $f_{\text{laminar}} = 64/Re$.