

Π -teoremet

Utviklet av Buckingham og andre.

Gitt: $x_1, \dots, x_n$ n variable med dimensjoner

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \text{ fysisk relasjon}$$

Beskrivet av m fundamentale dimensjoner
($L, M, T, \dots$)

Metoden rearrangerer relasjonen til

$$\phi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-k}) = 0$$

med hver π et dimensjonsløst produkt av noen av x 'ene.

OBS! Notasjonsforvirring
 $n \leftrightarrow k$ i litteraturen !!

Vanligvis er $k \leq m$.

Vis med et

Eksempel: Dragkraft på kule som dras gjennom
fluid
(eller bil på motorveien)

①

Velg de fysiske variable som bør inngå.

$$f(F_D, D, V, \rho, \mu) = 0$$

$$n = 5$$

Må velge rett - basert på eksperimenter.

②

Velg enten FLT eller MLT; bestem m

°/°

Her:

$$\left. \begin{aligned} F_D &= \left[\frac{ML}{T^2} \right] \\ D &= [L] \\ V &= \left[\frac{L}{T} \right] \\ g &= \left[\frac{L}{T^2} \right] \\ \mu &= \left[\frac{M}{LT} \right] \end{aligned} \right\} m = 3$$

③

Bestem k : For om man kan finne m variable som ikke danner dimensjonsløst produkt.

Ysæfall, $k = m$.

Eller ikke: For $(m-1)$ osv.

Her er $k = m = 3$:

$$g^a D^b V^c = \left[\frac{M}{L^3} \right]^a [L]^b \left[\frac{L}{T} \right]^c = M^a L^{-3a+b+c} T^{-c}$$

kan ikke gøres dimensjonsløst for noe valg av a, b, c , unntatt $a=b=c=0$!

④

Bestem # dimensjonsløse grupper:

$$n - k = 5 - 3 = 2$$

$\Rightarrow$

$$\phi(\pi_1, \pi_2) = 0$$

Se allerede her:
 $\tilde{\phi}(\pi_1^a, \pi_2^b) = 0$
 er en like god
 løsning!

⑤

Velg k variable som inneholder alle m dimensjonene g , som ikke danner π -gruppe mellom seg (primitive eller gjentatte variable).

Vanligvis "masse, geometri, kinematikk";
 her

g, D, V

* "slagord"

✓

Kommentar: Ofte potens #1 på de resterende; resultat: π 'ene blir potenser av de som vises her!

Dann π -grupper ved å multiplisere de gjentatte var. med de resterende, en for en, med ulik eksponent.

Her:

$$\pi_1 = \rho^{a_1} D^{b_1} V^{c_1} \mu$$

$$\pi_2 = \rho^{a_2} D^{b_2} V^{c_2} F_D$$

} av og til opptrer også de "gjentatte" variable i potens

⑥

Beregn eksponentene slik at hver

$$\pi = [M^0 L^0 T^0]$$

Her:

π_1 :

$$M^0 L^0 T^0 = \left(\frac{M}{L^3}\right)^{a_1} L^{b_1} \left(\frac{L}{T}\right)^{c_1} \frac{M}{LT}$$

$M \Rightarrow$

$$0 = a_1 + 1$$

$L \Rightarrow$

$$0 = -3a_1 + b_1 + c_1 - 1$$

$T \Rightarrow$

$$0 = -c_1 - 1$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = a_1 + 1 \\ 0 = -3a_1 + b_1 + c_1 - 1 \\ 0 = -c_1 - 1 \end{array} \right\} a_1 = -1, b_1 = -1, c_1 = -1$$

$$\pi_1 = \rho^{-1} D^{-1} V^{-1} \mu = \frac{\mu}{\rho D V} = \frac{1}{Re}$$

$$= 1/\text{Reynoldstallet}$$

π_2 :

Ved tilsvarende regning:

$$\pi_2 = \frac{F_D}{\rho D^2 V^2}$$

⑦

Rearranger:

$$\tilde{\phi}(\pi_1, \pi_2) = 0$$

$$\Rightarrow \pi_2 = \phi(\pi_1^{-1})$$

eller

$$F_D = \phi(Re) \rho D^2 V^2$$

↑
vanligvis lagrende
variabel

$$= \frac{\mu^2}{\rho} \phi_1(Re)$$

↑
nå er variabelen
funksjon av Re!