7. SIMILARITET OG DIMENSJONSANALYSE

I dette kapitlet skal vi

- Presentere det teoretiske grunnlaget for modellforsøk (og den praktiske bakgrunnen!)
- Vise hvordan man kan finne formler for strømningsproblemer, simpelthen ved å studere benevninga til størrelsene som inngår!

7.1 DEFINISJON OG BRUK AV SIMILARITET

Similaritet har vi, hvis to strømningstilfeller kan gjøres identiske ved skalering av de fysiske størrelsene som inngår. (multiplikasjon med konstante faktorer)

Det gjør det mulig å finne oppførselen til en prototype (p) ved å studere egenskapene til en modell (m).

- Fluiden kan være forskjellig
- Modellen kan være mindre eller større enn prototypen

Eksempler:

- Fly (vindtunnell)
- Drag på skip
- Hydraulisk maskineri
- Elver, havner, etc.

Hva vil dette si, matematisk?

Jo, selvsagt!! N-S-likninga såvel som grense- og begynnelsesbetingelsene må kunne transformeres over i hverandre, mellom to tilfeller!
Se oppgave G.5 med løsning (ikke pensum)!

Over til håndfast forklaring:

7.2/7.3/7.4 GEOMETRISK, KINEMATISK OG DYNAMISK SIMILARITET

Det følger at tre typer similaritet må være til stede, hvis to strømningstilfeller er similære:

i) Geometrisk similaritet: Samme form*

Skalaforhold $L_r = \frac{L_p}{L_m}$ (L_p, L_m lineære dimensjoner)
(Modellforhold $\lambda = 1/L_r$)

ii) Kinematisk similaritet: Geometrisk similaritet samt samme forhold mellom hastigheter på alle steder i strømmen

Hastighetsforhold
$$V_r = \frac{V_p}{V_m}$$

$\Rightarrow$ tidsforhold og akselerasjonsforhold følger:

$$T_r = \frac{L_r}{V_r}$$

$$a_r = \frac{L_r}{T_r^2} = \frac{V_r^2}{L_r}$$

*) MEN MERK!
Det finnes tilfeller der man skalerer med forskjellig faktor i forskjellige retninger!

iii) <u>Dynamisk</u> similaritet: Samsvarende krefter må ha samme forhold på alle punkter i strømmen.

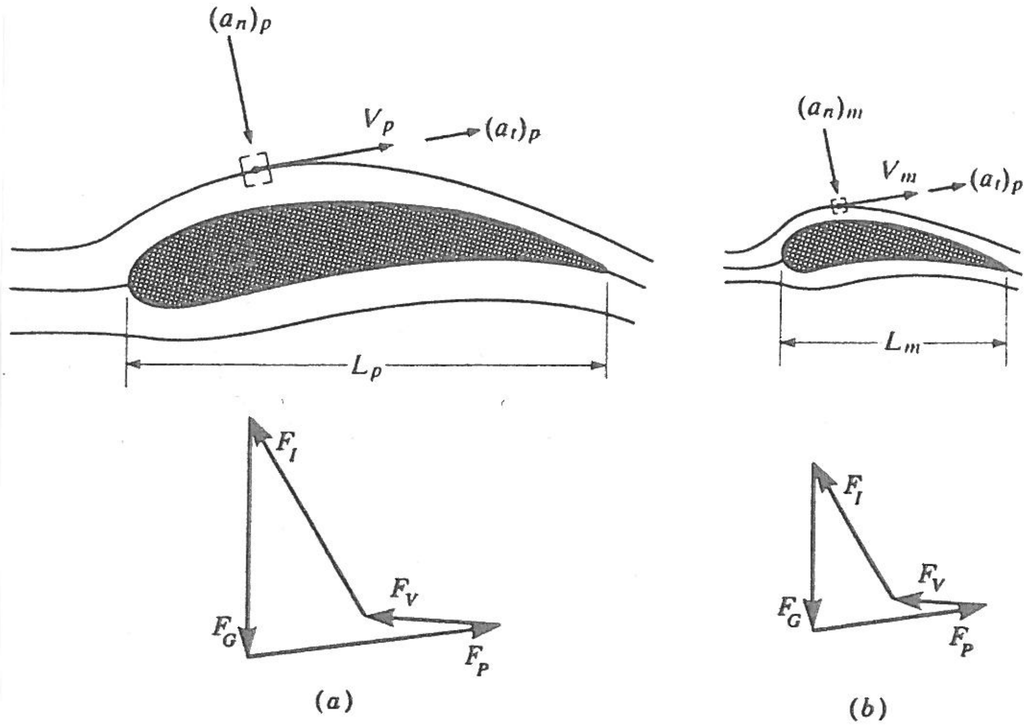

Figure 7.1 (*a*) Prototype. (*b*) Model. $L_r = L_p/L_m$; $V_r = V_p/V_m$.

[Hvis vi husker at N-S-likningen er en <u>kraft-balanse</u> (inkl. treghetskraft), betyr jo det at det er mulig å transformere likninga for ett tilfelle over til likningen for et annet!]

Kraftforhold:

$$F_r = \frac{F_p}{F_m}$$

F_p og F_m står for de forskjellige typene krefter som opptrer i modellen (m) og prototypen (p):

./.

$$\begin{array}{lll}
\text{Tyngde} & F_G = mg & = \rho L^3 g \\
\text{Trykk} & F_P = (\Delta p)A & = (\Delta p) L^2 \\
\text{Viskositet} & F_V = \mu\left(\frac{du}{dy}\right)A & \\
 & \quad = \mu \frac{V}{L} L^2 & = \mu V L \\
\text{Elastisitet} & F_E = E_v A & = E_v L^2 \\
\text{Overflatespenning} & & \\
 & F_T = \sigma L & \\
\text{Treghet} & F_I = ma & = \rho L^3 \frac{L}{T^2} = \rho V^2 L^2
\end{array}$$

$\sum \vec{F} = -\vec{F}_I \Rightarrow \sum(\text{alle } \vec{F} \text{ inkl } \vec{F}_I) = 0$, lukket polygon!

Dynamisk similaritet hvis:

$$\frac{F_{Gp}}{F_{Gm}} = \frac{F_{Pp}}{F_{Pm}} = \frac{F_{Vp}}{F_{Vm}} = \frac{F_{Ep}}{F_{Em}} = \frac{F_{Tp}}{F_{Tm}} = \frac{F_{Ip}}{F_{Im}}$$

Ikke alle størrelsene viktig i praksis
(de største kreftene i balansen er viktigst).
Opp til innsikt, erfaring og godt skjønn å
avgjøre hvilke av disse forholdene/størrelsene
man må ta hensyn til!

(Se f. eks. figuren om igjen.)

Hvis vi velger å se bort fra elastisitet og
overflatespenning, ser vi at vi trenger

$$\boxed{\begin{array}{ll}
\left(\frac{F_I}{F_G}\right)_p = \left(\frac{F_I}{F_G}\right)_m & \text{(samme \underline{Froudetall}!)} \\
\left(\frac{F_I}{F_P}\right)_p = \left(\frac{F_I}{F_P}\right)_m & \text{(samme \underline{Eulertall}!)} \\
\left(\frac{F_I}{F_V}\right)_p = \left(\frac{F_I}{F_V}\right)_m & \text{(samme \underline{Reynoldstall}!)}
\end{array}}$$

Reynoldstallet:

$$Re = \frac{F_I}{F_V} = \frac{L^2V^2\rho}{LV\mu} = \frac{LV\rho}{\mu} = \frac{LV}{\nu}$$

(Ved rørstrøm erstatter man vanligvis L med D)

*** Brukes hvis treghet og fluidfriksjon er dominerende størrelser.

Froudetallet:

$$Fr = \sqrt{\frac{F_I}{F_G}} = \sqrt{\frac{\rho L^2V^2}{\rho g L^3}} = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

*** Dette brukes for bølgemotstand mot skip og andre tyngdedominerte effekter.

Det er, praktisk sett, vanskelig å samtidig oppnå like Re og like Fr:

$$\left(\frac{LV}{\nu}\right)_m = \left(\frac{LV}{\nu}\right)_p \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \frac{L_p}{L_m}\frac{\nu_m}{\nu_p}$$

$$\left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_m = \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_p \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2}}$$

Det er i praksis umulig å oppfylle kravet i boksen!

Man utfører derfor modellforsøk som har enten Re eller Fr med samme verdi som for prototypen.

I framtida kan det bli aktuelt å utføre modellforsøk på Jorda for strømninger på Månen, og da vil også g være forskjellig fra modell til prototype!

Re og Fr er de viktigste parametrene som avgjør similaritet i henholdsvis friksjonsdominerte og tyngdedominerte situasjoner.
(rørstrøm) — (bølgemotstand, kanalstrøm)

OBS! OBS!

[I åpne kanaler og elver er både friksjonskraft og tyngdekraft viktige. Men det er vanligvis fullt utviklet turbulens der. Da er (som vi skal se) friksjonen omtrent uavhengig av Reynoldstallet. Modelleringskriteriet blir derfor like Froudetall.]

Satt på spissen:	
Bevegelse på overflate (overflateskip)	⇒ like Fr
Neddykket bevegelse (undervannsbåter	⇒ like Re

Detaljer om egenskapene til skalaparametrene ved similaritet:

Re:

$$Re = \frac{L_m V_m}{\nu_m} = \frac{L_p V_p}{\nu_p}$$

$$V_r = \frac{V_p}{V_m} = \frac{L_m}{L_p}\frac{\nu_p}{\nu_m} = \frac{\nu_r}{L_r} = \left(\frac{\nu}{L}\right)_r$$

$$T_r = \frac{L_r}{V_r} = \left(\frac{L^2}{\nu}\right)_r$$

$$a_r = \frac{V_r}{T_r} = \left(\frac{\nu^2}{L^3}\right)_r$$

Fr:
$$\frac{V_m}{\sqrt{g_m L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g_p L_p}}$$

$$V_r = \frac{V_p}{V_m} = \sqrt{L_r} \quad \text{(hvis samme } g\text{)}$$

$$T_r = \frac{L_r}{V_r} = \sqrt{L_r}$$

$$a_r = \frac{V_r}{T_r} = 1$$

Det gir videre for Froude:

$$Q_r = \frac{Q_p}{Q_m} = \frac{A_p}{A_m}\frac{V_p}{V_m} = L_r^{5/2}$$

eller:
$$Q_r' = L_r L_{r'}^{3/2}$$

hvis $L_{r'}$ (skalafaktor vertikalt) er forskjellig fra L_r (skalafaktor horisontalt).

— * —

Noen andre parametre som under visse forhold må ha samme verdi for modell og prototype:

Mach-tall $\quad Ma = \left(\frac{\text{treghetskraft}}{\text{elastisk kraft}}\right)^{1/2} = \frac{V}{\sqrt{E_v/\rho}} = \frac{V}{c}$

Weber-tall $\quad Wb = \left(\frac{\text{treghetskraft}}{\text{overflatespenningskraft}}\right)^{1/2} = \frac{V}{\sqrt{\sigma/\rho L}}$ ⟵ se regneøving H.11 og eks. oppg. 3, mai 2008

Euler-tall $\quad Eu = \left(\frac{\text{treghetskraft}}{\text{trykkraft}}\right)^{1/2} = \frac{V}{\sqrt{2g\,\Delta p/\gamma}}$

Eksempel 7.2

Et neddykket legeme skal bevege seg horisontalt gjennom olje med $s = 0.833$ og $\mu = 0.0287\ Ns/m^2$ med hastighet $V = 15\ m/s$. En modell med $\lambda = 8:1$ blir testa i $15°C$ vann.
Bestem hastigheta for modellen. Bestem også dragkrafta på prototypen, hvis dragkrafta på modellen er 3.5 N.

Løst:

Siden legemet er neddykket blir det ingen bølgekrefter (de er tyngdeeffekter). Re vil avgjøre.

Appendiks A, Tabell A1:

$$\nu_m = 1.14 \cdot 10^{-6} \ m^2/s$$

$$\left(\frac{DV}{\nu}\right)_p = \left(\frac{DV}{\nu}\right)_m , \qquad \lambda = \frac{D_m}{D_p} = 8:1$$

(modell større enn prototype)

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{D_p}{D_m}\frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{1}{\lambda}\nu_m\frac{\rho_p}{\mu_p}$$

$$V_m = \frac{1}{\lambda}\nu_m\frac{\rho_p}{\mu_p}V_p$$

$$= \frac{1}{8}\, 1.14 \cdot 10^{-6}\, \frac{0.833 \cdot 10^3}{0.0287} 15 \ m/s = \underline{\underline{0.062 \ m/s}}$$

Ved like Re er det samme forhold mellom dragkrefter som mellom treghetskrefter:

$$\left(\frac{F_I}{F_V}\right)_m = \left(\frac{F_I}{F_V}\right)_p$$

$$F_{V,p} = \frac{F_{I,p}}{F_{I,m}} F_{V,m} = \frac{\rho_p V_p^2 D_p^2}{\rho_m V_m^2 D_m^2} F_{V,m}$$

(Her kunne vi satt rett inn, men regner videre for å forenkle)

$$= \frac{\rho_p}{\rho_m}\frac{\nu_p^2}{\nu_m^2}\underbrace{\frac{V_p^2 D_p^2/\nu_p^2}{V_m^2 D_m^2/\nu_m^2}}_{(=1)} F_{V,m}$$

$$= \frac{1}{\rho_m \rho_p}\frac{\mu_p^2}{\nu_m^2} F_{V,m}$$

$$= \frac{1}{0.833 \cdot 10^6}\frac{(0.0287)^2}{(1.14 \cdot 10^{-6})^2} 3.5 N = \underline{\underline{2663 \ N}}$$

Eksempel 7.3

En 1:50 modell av en båt har bølgemotstand 0.02 N i vann ved 1.0 m/s. Finn tilsvarende bølgemotstand i prototypen. Finn effektbehovet for motoren i prototypen. Hvilken hastighet for prototypen representerer testen?

Løst:

Bølgekrefter er tyngdestyrte fenomener siden bølger er en tyngdebevegelse. Fr avgjør.

$$\left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_p = \left(\frac{V}{\sqrt{gL}}\right)_m \quad , \quad \frac{L_p}{L_m} = \frac{1}{\lambda} = 50$$ (modell mindre enn prototype)

$$\frac{V_p^2}{V_m^2} = \frac{L_p}{L_m}$$

Det er samme forhold mellom tyngdekrefter som mellom treghetskrefter ved like Froudetall ⇒

$$F_{G,p} = \frac{F_{I,p}}{F_{I,m}} F_{G,m}$$

$$= \frac{\rho_p V_p^2 L_p^2}{\rho_m V_m^2 L_m^2} F_{G,m} \qquad (\rho_p = \rho_m)$$

$$= \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^3 F_{G,m}$$

$$= (50)^3 \; 0.02 \text{ N} = \underline{\underline{2500 \text{ N}}}$$

$$V_p = \sqrt{L_r}\, V_m = (50)^{1/2} \cdot 1 \text{ m/s} = \underline{\underline{7.1 \text{ m/s}}}$$

$$P_p = F_{G,p} V_p = \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^{7/2} F_{G,m} V_m$$

$$= (50)^{7/2} \cdot 0.02 \cdot 1 \text{ Nm/s} = \underline{\underline{17.7 \text{ kW}}}$$

7.5 SKALAFORHOLD

[Dette avsnittet inneholder mange nyttige skaleringsrelasjoner av den typen vi utledet i de to foregående eksemplene. Vi kommer ikke nærmere inn på dem]

7.6 KOMMENTARER OM MODELLER

Ting å passe på:

- enten turbulent eller laminær strøm i både modell og prototype (like Re-tall)
- I pumper etc.: Essensiell med similaritet, men bruk slik rotasjonshastighet at $V_p = V_m$ (unngå kavitasjon!)
- Overflateruhet skaleres sammen med andre lineære dimensjoner
- Ofte nødvendig å sette modell i vakuumkammer for å gjenskape trykk
- Pass på Mach-tallet ved flytesting! (Kan senke hastighet i modellen ved å øke trykket)