14.7 ORTOGONALITET AV STRØMLINJER OG EKVIPOTENSIALLINJER (bare i 2D)

[Strømfunksjonen er bare definert i 2-D, så det som nå kommer gjelder bare der.]

Skriv $d\psi$ og $d\phi$ som totale differensial:

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -v\,dx + u\,dy$$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = u\,dx + v\,dy$$

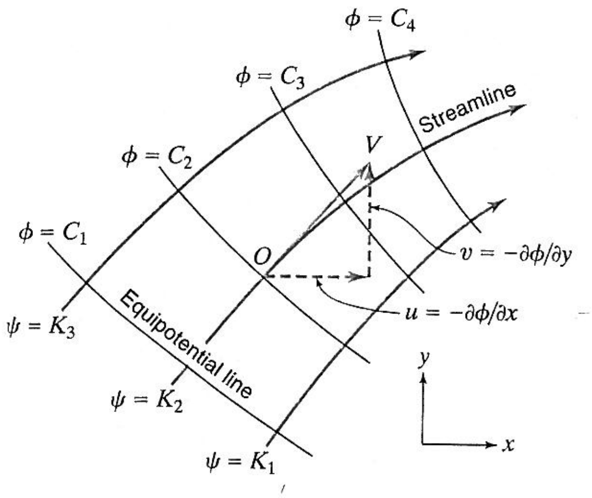
$$\left.\begin{aligned} d\psi = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = +\frac{v}{u}\ ^{*} \\ d\phi = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ Strømlinjer og ekvipotensiallinjer er ortogonale overalt!

(SE NESTE SIDE)

Dessuten:

$$\left.\begin{aligned} \left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right| &= \left|\frac{\partial\psi}{\partial y}\right| \\ \left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right| &= \left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ Ved strømlinjer og ekvipotensiallinjer gitt ved $\psi = K_i$ og $\phi = C_i$, og lik økning ~~avstand~~ mellom linjer i ϕ og ψ mellom linjer, blir skjæringsmønstret kvadratisk når økningen $\Rightarrow 0$.

Vi har hermed begrunnet innføringen av strømnett kapitel 4.



$$|\vec{u}| = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$$

$$\vec{u} = -\operatorname{grad}\phi$$

$$|\vec{u}| = -\frac{\partial\phi}{\partial s}$$, hvor s måles langs strømlinjen

Se forrige side:
Ved $d\psi = 0$ (langs strømlinje) gir relasjonen $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ at

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

Dette kan også utledes på en annen måte, der vi ikke har krav om 2D'itet via ψ; vi har faktisk i 3D at likningene for en strømlinje er gitt ved

$$\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}}$$ STRØMLINJE-LIKNINGENE

— * —

Strømnett kan bare eksistere hvis både kontinuitet og rotasjonsfrihet er oppfylt.
Derfor finnes det bestandig hvis Laplacelikningen (5.21) er oppfylt (potensialstrøm) for en ideell fluid.

Eksempel 14.5

Et stasjonært strømfelt er gitt ved

$$u = 2x, \quad v = -2y$$

Finn strømfunksjonen og potensialfunksjonen, og plott strømnettet.

Husk å sjekke kontinuitet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 2 = 0 \quad \text{(i orden)}$$

OK, du kan finne strømfunksjonen:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x \quad \Rightarrow \quad \psi = 2xy + f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2y + f'(x) = -(-2y) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$$

Og når $f'(x) = 0$ integreres, fås en integrasjonskonstant som er uavhengig av både x og y:

$$\psi(x,y) = 2xy + C_1$$

Husk så å sjekke virvlingsfrihet:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \quad \text{(i orden)}$$

Da kan du finne et hastighetspotensial:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x \Rightarrow \phi = -x^2 + g(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = g'(y) = -(-2y) \Rightarrow g(y) = y^2 + C_2$$

Så ~~kunne~~ $g'(y) = 2y$ integreres, og integrasjonskonstanten som da oppsto måtte være uavhengig av både x og y:

$$\phi(x,y) = y^2 - x^2 + C_2$$

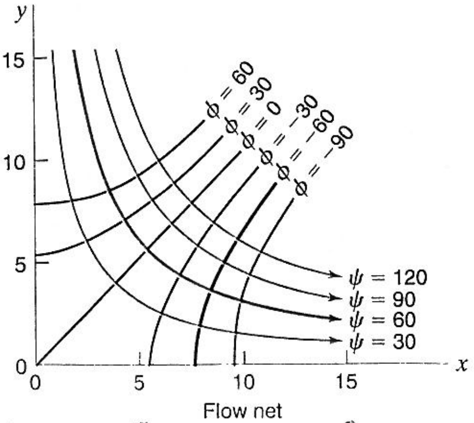
Avslutningvis:
La ϕ og ψ passere gjennom origo med valget $\phi(0,0) = 0$ og $\psi(0,0) = 0$, og få med det valget:

$$C_1 = C_2 = 0 \,!$$

Plott strømlinjer fra: $\quad y = \dfrac{\psi}{2x}$
" ekvipotensial " " : $\quad y = \pm\sqrt{x^2 + \phi}$

$\Bigg\}$ begge er kjent for å være hyperbler!

I første kvadrant, opptegnet:



Flow net

Dette framstiller ideell strøm i et hjørne.