

14.6

HASTIGHETSPOTENSIAL

[Vi skal definere det i 2-D, men utvidelsen til 3-D er helt triviell.]

Et hastighetspotensial $\phi(x, y)$ defineres som

$$\boxed{\vec{u} = -\nabla \phi}$$

(Analogi til
potensial og feltstyrke
i elektrostatiske)

Kartesisk komponentform:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

Polarkoordinat komponentform:

$$u_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad u_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

Sett inn (5.19) i kontinuitetsbetingelsen: Få

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0}$$

Laplace
likning

Sett inn i uttrykket for virling:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} - \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right) = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ hvis et hastighetspotensial eksisterer, er strømmen rotationsfri

Og omvendt, siden curl grad $\equiv 0$.
(MATEMATISK-TEKNISK FAKTUM)

14.7

ORTOGONALITET AV STRØMLINJER OG EKUIPOTENSIALLINJER

(bare i 2D)

[Strømfunksjonen er bare definert i 2-D, så det som nå kommer gjelder bare der.]

Skriv $d\psi$ og $d\phi$ som totale differensial:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = u dx + v dy$$

$$\left. \begin{aligned} d\psi = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = +\frac{v}{u}^* \\ d\phi = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Strømlinjer og ekvipotensiallinjer er ortogonale overalt!}$$

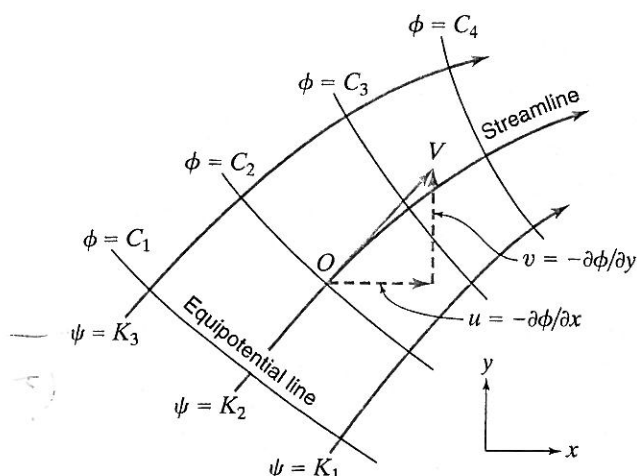
(SE NESTE SIDE)

Dessuten:

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| &= \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right| \\ \left| \frac{\partial \phi}{\partial y} \right| &= \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Ved strømlinjer og ekvipotensiallinjer gitt ved $\psi = K$ og $\phi = C$, og ikke skæring ~~avstand~~ mellom linjer i ϕ og ψ mellom linjer, blir skjæringsvinkelen kvadratisk når skæringen $\Rightarrow 0$.

Vi har hermed begrunnet innføringen av strømlinjer i kapittel 4.



$$|\vec{u}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

$$\vec{u} = -\text{grad } \phi$$

$$|\vec{u}| = -\frac{\partial \phi}{\partial s}, \text{ hvor } s \text{ måles langs strømlinjen}$$

Se forrige side:

Ved $d\psi = 0$ (langs strømlinje) gir relasjonen $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ at

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

Dette kan også utledes på en annen måte, der vi ikke har krav om 2Ditet via ψ ; vi har faktisk i 3D at likningene for en strømlinje er gitt ved

$$\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}} \quad \text{STRØMLINJE-LIKNINGENE}$$

- * -

~~Strømfelt~~ kan bare eksistere hvis både kontinuitet og relasjonsfrihet er oppfylt.

Derfor finnes det bestandig hvis Laplace likningen (5.27) er oppfylt (potensialstrøm) for en ideell fluid.

Eksempel 14.5

Et stasjonært ~~strømfelt~~ er gitt ved

$$u = 2x, \quad v = -2y$$

Finn strømfunksjonen og potensialfunksjonen, og plott ~~strømfeltet~~.

Husk å sjekke kontinuitet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2 - 2 = 0 \quad (\text{i orden})$$

OK, du kan finne strømfunksjonen:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x \Rightarrow \psi = 2xy + f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2y + f'(x) = -(-2y) \Rightarrow f'(x) = 0$$

Og når $f'(x) = 0$ integreres, fås en integrasjonskonstant som er ~~ikke~~ uavhengig av både x og y :

$$\underline{\underline{\psi(x, y) = 2xy + C_1}}$$

Husk så å sjekke vortingsfrikhet:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \quad (\text{i orden})$$

Da kan du finne et hastighetspotensial:

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x \Rightarrow \phi = -x^2 + g(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y} = g'(y) = -(-2y) \Rightarrow g(y) = y^2 + C_2$$

Så kunne $g'(y) = 2y$ integreres, og integrasjonskonstanten som da oppsto måtte være uavhengig av både x og y :

$$\underline{\phi(x, y) = y^2 - x^2 + C_2}$$

Abslutningsvis:

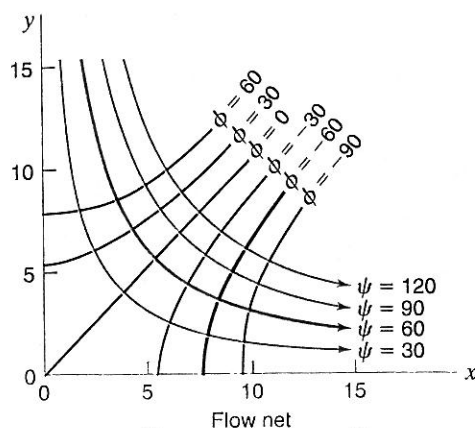
La ϕ og ψ passere gjennom origo med valget $\phi(0, 0) = 0$ og $\psi(0, 0) = 0$, og få med det valget:

$$\underline{C_1 = C_2 = 0!}$$

Plott strømninger fra:
" ekvipotensial " "

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{\psi}{2x} \\ y &= \pm \sqrt{x^2 + \phi} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{begge er} \\ \text{kjent for} \\ \text{å være} \\ \text{hyperbler!} \end{array}$$

3 første kvadrant, opptegnet:



Dette framstiller ideell strøm i et hjørne.