14.4 STRØMFUNKSJONEN

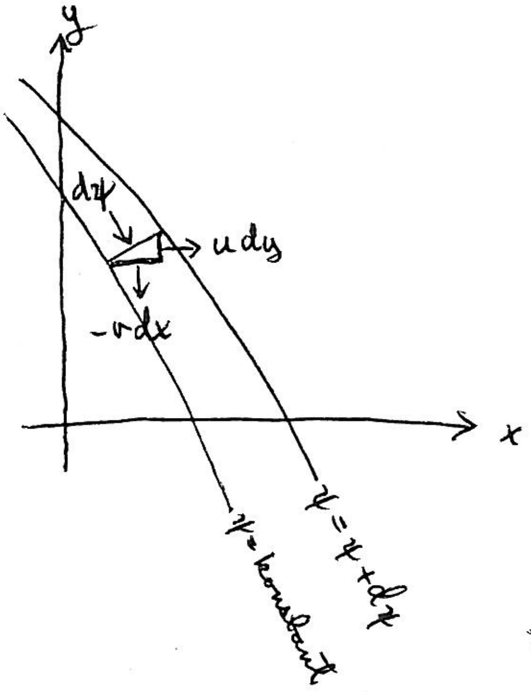
Vi innfører nå en <u>strømfunksjon</u> ψ (psi), basert på kontinuitetsprinsippet, slik at

$$\psi(x,y) = \text{konstant}$$

er likningen for en strømlinje i 2 dimensjoner.

[Selv om det ikke står klart i boka, kan ikke ψ generaliseres til 3 dimensjoner.]

Ingen strøm på tvers av strømlinjer $\Rightarrow$ oppfatt ψ ved konstruksjon som total strøm mellom f.eks. origo og en gitt strømlinje.



Kontinuitet:

$$d\psi = -v\,dx + u\,dy$$

Totalt differensial:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

Kontinuitet må være oppfylt for at ψ skal eksistere, men <u>strømmen trenger ikke være virvlingsfri</u>! (Se senere!)

(Prøv sjøl: Sett inn (5.15) i $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ og vis at kontinuitet er automatisk oppfylt.)

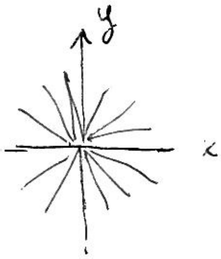
14.5 EKSEMPLER PÅ STRØMNINGSFELT (2-D)

i) Rettlinjet uniform strøm i positiv x-retning:

$$\left.\begin{array}{l} u = U = \text{konstant} \\ v = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = U$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\psi = Uy} \ (+\ \text{konstant})$$

ii) Kilde/sluk i origo: $\boxed{\psi = \pm \dfrac{q\theta}{2\pi}}$ $\quad d\psi = \pm \dfrac{q}{2\pi} d\theta$



$$\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\psi = \pm q = \text{total strøm}$$

$v_\theta = 0$

$v_r = \dfrac{\pm q}{2\pi r}$ (se også regneøving)

iii)

Fordel:

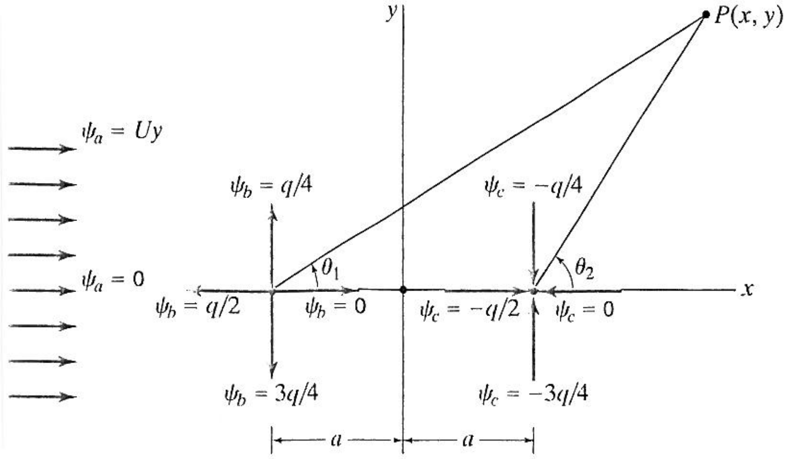
Vi kan superponere strømningsfelter ved å addere feltenes ψ'er, og deretter finne totalt hastighetsfelt ved å bruke ψ-definisjonen ved u og v.

Eksempel: Rettlinjet strøm inn fra uendeligheten, kilde i $x=-a$, sluk i $x=+a$:

$$\psi = Uy + \frac{q\theta_1}{2\pi} - \frac{q\theta_2}{2\pi} \qquad (5.16)$$

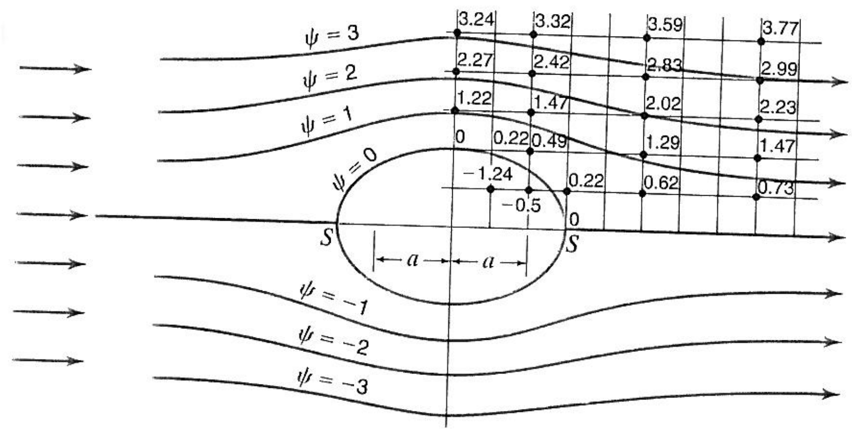
$$= Uy + \frac{q}{2\pi}\left(\text{arctg}\,\frac{y}{x+a} - \text{arctg}\,\frac{y}{x-a}\right) \qquad (5.17)$$

(se neste side)



<u>Eksempel 17.4</u>

Ovenstående, med $U = 0.80$, $q = 2\pi$, $a = 2$:



$\psi = 0$ gir en <u>lukket kurve</u> som det ikke strømmer væske gjennom

$\Rightarrow$ strømbilde som omkring et <u>fast legeme</u>.

Stagnasjonspunkter finnes ved $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$.

<u>OBS:</u>

Dette er bildet av en <u>ideell</u> væskestrøm.

14/12

iv) Dublett $\overset{\text{def.}}{=}$ kilde-sluk-kombinasjon hvor

$$2qa = m = \text{konstant}$$

i grensen $a \to 0$: Kan vise at for superposisjon av den uniforme strømmen og dubletten er

$$\psi = Uy - \frac{m \sin\theta}{2\pi r}$$
$$= Ur\sin\theta - \frac{m\sin\theta}{2\pi r}$$

$$\psi = 0 \Rightarrow \qquad r_{\psi=0} = R = \sqrt{\frac{m}{2\pi U}}$$

Superposisjonen av den uniforme strømmen og dubletten beskriver strømning omkring <u>sylinder</u>.

[Reell-væske-effekter som strømavløsning bak sylinderen, friksjon, etc. ville modifisere dette ideelle bildet.]

v) Superposisjon av rotasjon og uniform strøm

Dette kan brukes (<u>ikke</u> <u>eksamenspensum</u>) til å beregne løftet på en vinge. Se kapittel 9 (ikke pensum):
Vingetverrsnittet "avbildes" på en sylinder, og hvis denne roterer kan løftet lett beregnes ved superposisjon og Bernoullis lov.

Liknende beregninger kan forklare hvorfor en "skruball" bøyer av i luften. (Men uten å ta med grensesjikteffekter, finner vi avbøyning i <u>FEIL RETNING</u>!