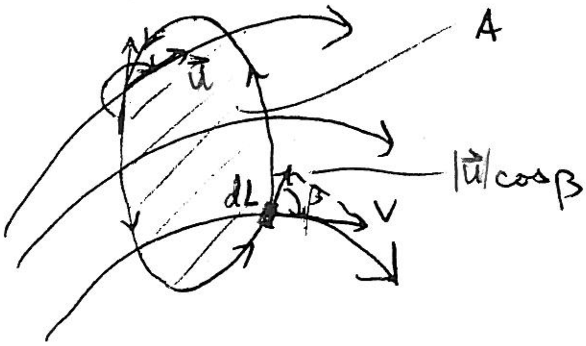
14.3 SIRKULASJON OG VIRVLING

Sirkulasjonen langs en lukket kurve i et strømningsfelt er linjeintegralet av hastigheten rundt kurven:

$$\boxed{\Gamma = \oint \vec{u}\cdot d\vec{L} = \oint |\vec{u}| \cos\beta \, dL}$$



(Integrasjonen er instantan for hvert tidspunkt)

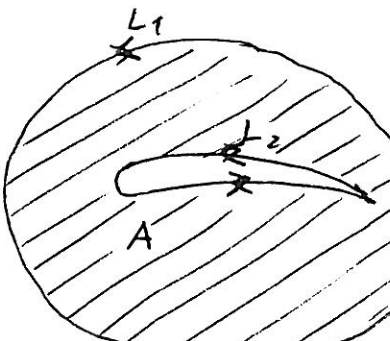
Men vi som kjenner Stokes' sats, vet at dette er lik et flateintegral:

$$\boxed{\Gamma = \int_A (\nabla\times\vec{u})\cdot d\vec{A} = \int_A \vec{\xi}\cdot d\vec{A}}$$

$\vec{\xi}$ = virvlinga

Som vanlig $d\vec{A} = \hat{n}\, dA$; integralet tas over en flate som den lukkede kurven ligger i.

Det er ikke et krav at denne flaten skal være plan – men i dette kurset holder vi oss mest til 2 dimensjoner, dvs. plan strøm.



Hvis det er "hull" i integrasjonsområdet, kan sirkulasjonen være $\neq 0$ selv om $\xi = 0$:

$$\int_A (\nabla\times\vec{u})\, d\vec{A} = \oint_{L_1} \vec{u}\cdot d\vec{L} - \oint_{L_2} \vec{u}\cdot d\vec{L}$$

Viktig anvendelse: Flyvingeteori !

Eksempel 14.3

Anta inkompressibel strøm.
Sjekk om disse strømfeltene er virvlingsfrie og kontinuerlige:

a) $v_r = 0$, $v_t = 6r$

b) $v_r = \pm \frac{5}{r}$, $u_t = 0$

a) $\frac{\partial}{\partial r}(0) + \frac{0}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(6r) = 0$ (dvs kontinuerlig)

$\frac{\partial}{\partial r}(6r) + \frac{6r}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(0) = 12$ (roterende strøm, ikke virvlingsfri)

Tilfelle a) er fast-legeme-rotasjon.

b) $\frac{\partial}{\partial r}(-\frac{5}{r}) + \frac{-5/r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(0) = 0$ (dvs. kontinuerlig)

$\frac{\partial}{\partial r}(0) + \frac{0}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\pm\frac{5}{r}) = 0$ (virvlingsfri)

Tilfelle b) kan representere en kilde eller sluk.

— x —

I forrige avsnitt:
Hastighetsfeltet $v_r = 0$, $v_t = \frac{1}{r}$ er virvlingsfritt.
Stokes' sats burde da gi at sirkulasjonen langs en bane rundt origo er lik 0!

Men prøv å beregne den direkte fra definisjonsintegralet:

$$\Gamma = \oint \vec{u}\cdot d\vec{L} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} v_t\, dL = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, r\, d\theta = 2\pi \neq 0!$$

Hvis vi deformerer integrasjonsveien, ser vi at samme svar fås for alle veier som omslutter origo!!
Det skyldes at origo er et "singulært punkt" for v_t.