14. MATEMATIKK FOR IDEELL STRØM (ELEMENTÆR HYDRODYNAMIKK)

I tidligere kapitler trakk vi ut av bevegelses-likningen informasjon om bevegelsen langs en strømlinje, dvs. 1D fluidmekanikk.

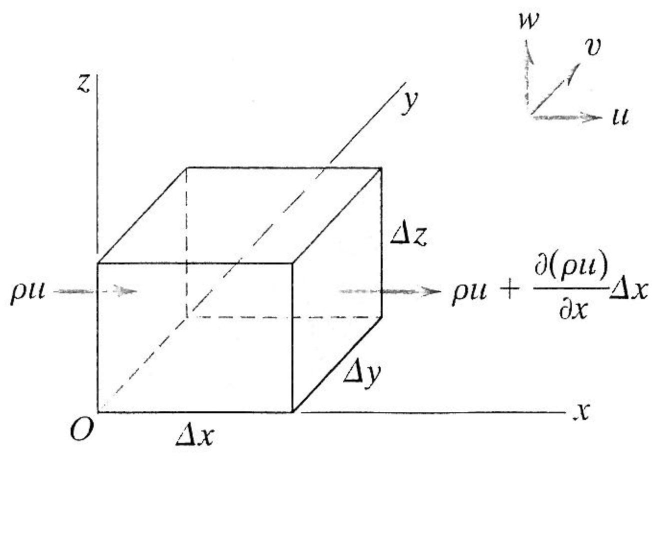
I dette kapitlet betrakter vi 2 og 3 dimensjoner, og nærmere bestemt forenklingen som framkommer (POTENSIALSTRØM) når strømfeltet er VIRVLINGSFRITT.

Vi holder oss mest til INKOMPRESSIBEL STRØM, og betrakter da VÆSKEstrøm i den vanlige approksimasjonen. Altså HYDROdynamikk.

Vi har sett at i reell strøm er det viskøse leddet i bevegelseslikninga viktig mest i begrensa områder nær vegger. Teorien for ideell strøm i dette kapitlet er selvsagt en approksimasjon, som imidlertid gjelder med en ~~xxx~~ rimelig nøyaktighet i områder hvor det viskøse leddet er uviktig, dvs. i HOVEDDELEN av strømmen

14.1 Kontinuitetslikninga på differensiell form

Istedenfor formen utledet i kapittel 4, skal vi finne et uttrykk som gjelder i grensen av små volumer.



Netto massestrøm <u>inn</u> i boksen i x-retning:

$$-\frac{\partial(\rho w)}{\partial x}\Delta x\,\underbrace{\Delta y\,\Delta z}_{\text{areal}}$$

Tilsvarende for de andre retningene.
Masseøkning i boksen pr. tidsenhet:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\underbrace{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}_{\text{volum}}$$

Massebalanse, etter forkorting av volumet:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)-\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)-\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Eller:

$$\boxed{\nabla\cdot(\rho\vec{u}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0}$$

IKKESTASJONÆR strøm, KOMPRESSIBEL fluid

Fullt utskrevet:

$$\underbrace{u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}}_{(\vec{u}\cdot\nabla)\rho}+\rho\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}}_{\nabla\cdot\vec{u}}\Big) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Videre forenklinger:

$$\boxed{(\vec{u}\cdot\nabla)\rho + \rho(\nabla\cdot\vec{u}) = 0}$$

STASJONÆR strøm

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{u} = 0}$$

~~Alt~~ INKOMRESSIBEL strøm, stasjonær/ikkestasjonær!

I polarkoordinater får vi tilsvarende:

$$\boxed{\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0}$$

INKOMPRESSIBEL strøm

Eksempel 14.1

Anta ρ = konstant.
Oppfyller disse hastighetsfeltene kontinuitetslikninga? (De kort fra enketer)

a) $u = -2y$, $v = 3x$, $w = 0$

b) $u = 0$, $v = 3xy$, $w = 0$

c) $u = 2x$, $v = 0$, $w = -2z$

a) $\nabla \cdot \vec{u} = -\frac{\partial(2y)}{\partial x} + \frac{\partial(3x)}{\partial y} + 0 = 0 + 0 + 0 = 0$ Ja

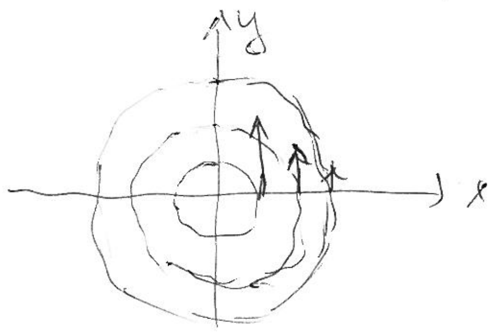
b) $\nabla \cdot \vec{u} = 0 + \frac{\partial(3xy)}{\partial y} + 0 = 3x \neq 0$ Nei

c) $\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + 0 + \frac{\partial(-2z)}{\partial z} = 2 + 0 - 2 = 0$ Ja

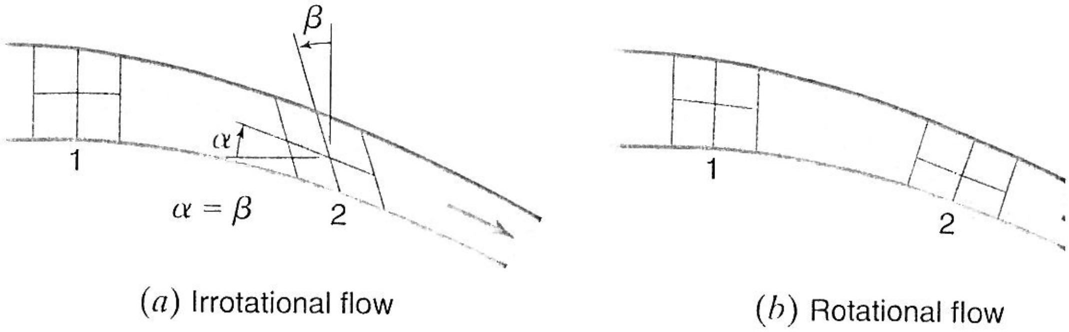
Annet eksempel

Gitt hastighetsfeltet $v_r = 0$, $v_\theta = \frac{1}{r}$, konstant ρ.
Oppfyller hastighetsfeltet kontinuitetslikninga?

$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial r}(0) + \frac{0}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\right) = 0 + 0 + 0 = 0$ Ja!



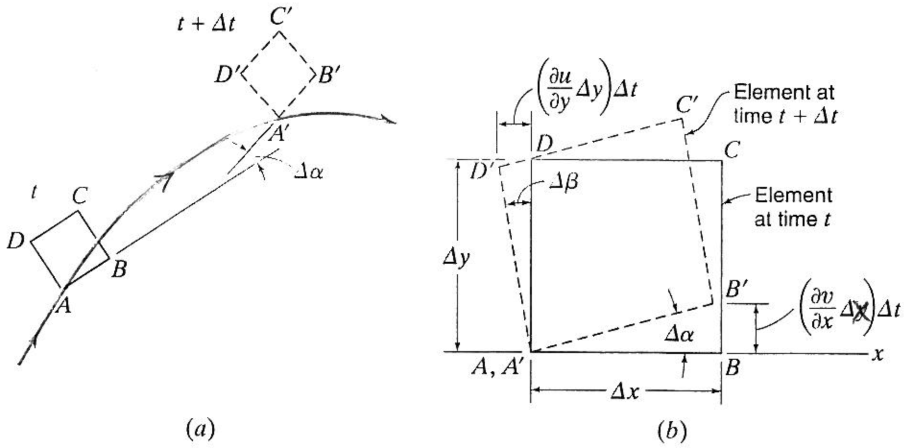
14.2 Roterende strøm og rotasjonsfri strøm



(a) Irrotational flow (b) Rotational flow

Selv i tilfeller med deformerte volumelementer er det netto rotasjon som avgjør om en strøm er rotasjonsfri eller ikke.

Strømmende volumelement (2D) med rotasjon og deformasjon:



Hva er betingelsen for rotasjonsfri netto deformasjon?

Figuren viser en antatt parallellforskyving av elementet fra sluttposisjon til startposisjon.

Kantrotasjonsvinkler:

$$\Delta\alpha = \frac{(\partial v/\partial x)\Delta x}{\Delta x}\Delta t = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta t$$

$$\Delta\beta = -\frac{(\partial u/\partial y)\Delta y}{\Delta y}\Delta t = -\frac{\partial u}{\partial y}\Delta t$$

Kantenes rotasjonsvinkelhastigheter:

$$\omega_\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\omega_\beta = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Elementets netto rotasjonsvinkelhastighet er pr. def. gjennomsnittet:

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\omega_\alpha + \omega_\beta) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Tilsvarende resultater fås for rotasjon i xz-planet (om y-aksen) og i yz-planet (om x-aksen).

Totalt resultat: (Curl er involvert!)

$$\boxed{\nabla \times \vec{u} = 0}$$ ROTASJONSFRI, INKOMPRESSIBEL strøm

På komponentform:

$$(\nabla \times \vec{u})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$
$$(\nabla \times \vec{u})_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$
$$(\nabla \times \vec{u})_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

Dette kan også formuleres i polarkoordinater, på 2D form.

Med

$$(\nabla \times \vec{u})_z = \xi \quad (\text{i } 2D)$$

fås kravet

$$\boxed{\xi = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0}$$ INKOMPRESSIBEL strøm

for rotasjonsfrihet.

Ofte innføres den fulle vektoren, virvlinga:

ET MÅL FOR LOKAL ROTASJON!

$$\vec{\xi} = \nabla \times \vec{u}$$

Kravet for rotasjonsfrihet i 3D er da at $\vec{\xi}$'s komponenter alle er lik 0:

$$\xi_x = \xi_y = \xi_z = 0$$

Eksempel 14.2

Anta ρ = konstant.
Avgjør om disse hastighetsfeltene er rotasjonsfrie:

a) $u = -2y$, $v = 3x$ b) $u = 0$, $v = 3xy$ c) $u = 2x$, $v = -2y$

a)
$$\xi = \frac{\partial}{\partial x}(3x) - \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = 3+2 \neq 0$$ Nei!

b)
$$\xi = \frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(0) = 3y - 0 \neq 0$$ Nei!

c)
$$\xi = \frac{\partial}{\partial x}(-2y) - \frac{\partial}{\partial y}(2x) = 0 - 0 = 0$$ Ja!

Men hva med det "andre" eksemplet i forrige avsnitt:

$$v_r = 0$$
$$v_t = \frac{1}{r}$$

I polarkoordinater:

$$\boxed{\xi = \frac{\partial v_t}{\partial r} + \frac{v_t}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}}$$

dvs.
$$\xi = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1/r}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(0) = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + 0 = \underline{\underline{0}}$$

Dette vilt roterende hastighetsfeltet er virvlingsfritt !! (dvs. ingen lokal rotasjon)