

14. MATEMATIKK FOR IDEELL STRØM (ELEMENTÆR HYDRODYNAMIKK)

I tidligere kapitler trakk vi ut av bevegelseslikningene informasjon om bevegelsen langs en strømning, dvs. 1D fluidmekanikk.

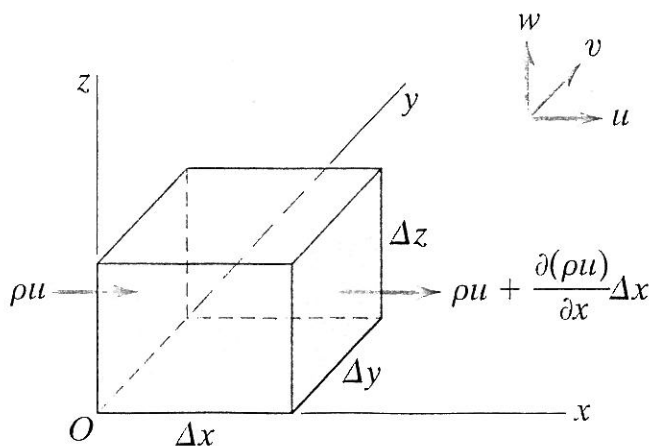
I dette kapitlet betrakter vi 2 og 3 dimensjoner, og normert konstant forenklingen som framkommer (POTENSIALSTRØM) når strømfeltet er VIRVLINGSFRITT.

Vi holder oss nært til INKOMPRESSIBEL STRØM, og betrakter da VÆSKEstrøm i den vanlige approksimasjonen. Altså HYDRODYNAMISK.

Vi har sett at i reell strøm er det viskøse leddet i bevegelseslikninga viktig mest i begrensede områder nær vegger. Teorien for ideell strøm i dette kapitlet er selvsagt en approksimasjon, som imidlertid gjelder med en ~~no~~ visstlig høy nøyaktighet i områder hvor det viskøse leddet er uviktig, dvs. i HOVEDDELTEN av strømmen.

14.1 Kontinuitetslikninga - på differensiell form

Stedenfor formen utledet i kapittel 4, skal vi finne et uttrykk som gjelder i grensen av små volumener.



Netto massestrøm inn i boksen i x-retning:

$$- \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \underbrace{\Delta y \Delta z}_{\text{areal}}$$

Tilsvarende for de andre retningene.

Masseøkning i boksen pr. tidsenhet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\text{volum}}$$

Massebalanse, eller forbeholdning av volumet:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

eller:

$$\boxed{\nabla \cdot (\rho \vec{u}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

IKKESTASJONÆR strøm,
KOMPRESSIBEL fluid

Fullt utskrevet:

$$\underbrace{u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}}_{(\vec{u} \cdot \nabla) \rho} + \rho \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)}_{\nabla \cdot \vec{u}} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Videre forenklinger:

$$\boxed{(\vec{u} \cdot \nabla) \rho + \rho (\nabla \cdot \vec{u}) = 0}$$

STASJONÆR strøm

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{u} = 0}$$

INKOMPRESSIBEL strøm,
stasjonær/iskestasjonær!

3 polar koordinater får vi tilsvarende:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$$

INKOMPRESSIBEL
strøm

Eksempel 14.1

Anta $\rho = \text{konstant}$.

Oppfyller disse hastighetsfeltene kontinuitetslikninga? (de bort fra enheter)

a) $u = -2y$
 $v = 3x$
 $w = 0$

b) $u = 0$
 $v = 3xy$
 $w = 0$

c) $u = 2x$
 $v = 0$
 $w = -2z$

a) $\nabla \cdot \vec{u} = -\frac{\partial(2y)}{\partial x} + \frac{\partial(3x)}{\partial y} + 0 = 0 + 0 + 0 = 0$

Ja

b) $\nabla \cdot \vec{u} = 0 + \frac{\partial(3xy)}{\partial y} + 0 = 3x \neq 0$

Nei

c) $\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + 0 + \frac{\partial(-2z)}{\partial z} = 2 + 0 - 2 = 0$

Ja

Annit eksempel

ett hastighetsfelt $v_r = 0$, $v_\theta = \frac{1}{r}$, konstant ρ .

Oppfyller hastighetsfeltet kontinuitetslikninga?

$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial}{\partial r}(0) + \frac{0}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \right) = 0 + 0 + 0 = 0$

Ja!

