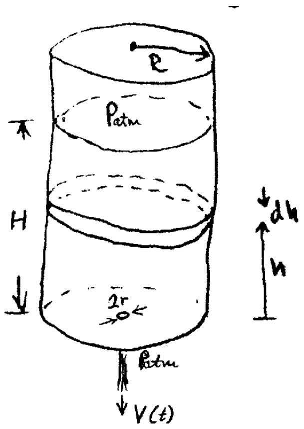
**Løsning D.1**




I grensen $r \ll R$ vil synkehastigheten til vannoverflaten være neglisjerbar sammenlignet med $V(t)$, den instantane utløpshastigheten gjennom hullet. Det er egentlig ikke en stasjonær strøm siden overflatehøyden $h(t)$ hele tiden synker og utløpshastigheten dermed avtar. Men hvis $R$ og $h(t)$ er av samme størrelsesorden er stasjonær strøm en god approksimasjon i alle øyeblikk. Da kan Bernoullis ligning brukes, og resultatet er Torricellis lov:

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + h(t) + 0 = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + 0 + \frac{1}{2g}V(t)^2$$

$$V(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

Kontinuitetsligningen gir at i et tidsrom $dt$ vil væskeoverflaten falle gjennom et volum som er lik det som strømmer ut av hullet:

$$-dh\,\pi R^2 = V\pi r^2\,dt$$

Omordnet, innsatt for $V$, og integrert under forutsetning av at overflatehøyden faller fra $H$ til $H/2$ i tidsrommet $T$:

$$\begin{aligned} -\frac{dh}{\sqrt{h}} &= (\frac{r}{R})^2\sqrt{2g}\,dt \\ -\int_H^{H/2}\frac{dh}{\sqrt{h}} &= (\frac{r}{R})^2\sqrt{2g}\int_0^T dt \\ T &= (1-\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{R}{r})^2\sqrt{\frac{2H}{g}} \end{aligned}$$

*Talleksempel:*
$h = 1$ m, $R = 0.5$ m, $r = 0.5$ cm

$$\Rightarrow \qquad T = (1-\frac{1}{\sqrt{2}})(100)^2\sqrt{\frac{2\cdot 1}{9.81}}\ \text{s} = \qquad \text{22 min 3 s}$$

*Kommentar:*
Dette idealiserte resultatet får en korreksjonsfaktor av størrelsesorden 1 (eller større) for en reell væske. – Man ser ofte oppgaven i en versjon hvor det spørres etter tiden for full tømming. Faktoren $(1 - 1/\sqrt{2})$ blir da borte. Men da opptrer grensen $h \ll R$ i løpet av integrasjonen, og løsningen vil der avvike mer fra det reelle tilfellet fordi overflatespenningseffekter og viskositet blir viktigere.

**Løsning D.2**

Det oppgitte uttrykket for utstrømshastigheten er Torricellis lov (utledet i forrige oppgave) i omskrevet form. Det antas altså at utstrømshastigheten for den ideelle væsken er størst ved spaltens underkant.

a)
La $A = 2bL$ være spaltearealet. Volumstrømraten blir:

$$\begin{aligned} Q &= \int_A u\,dA \\ &= b\sqrt{2g}\int_{-L}^{L}\sqrt{h-z}\,dz \\ &= \frac{2}{3}b\sqrt{2g}\left[(h+L)^{3/2}-(h-L)^{3/2}\right] \end{aligned}$$

b)
Forenkling i grensen $L \ll h$:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2}{3}b\sqrt{2g}h^{3/2}\left[(1+\frac{L}{h})^{3/2}-(1-\frac{L}{h})^{3/2}\right] \\ &= \frac{2}{3}b\sqrt{2g}h^{3/2}\left[(1+\frac{3}{2}\frac{L}{h}+\mathcal{O}(\frac{L}{h})^2)-(1-\frac{3}{2}\frac{L}{h}+\mathcal{O}(\frac{L}{h})^2)\right] \\ &= \frac{2}{3}b\sqrt{2g}h^{3/2}\,3\frac{L}{h}\,(1+\mathcal{O}(\frac{L}{h})^2) \\ &= 2bL\sqrt{2gh}\,(1+\mathcal{O}(\frac{L}{h})^2) \\ &= VA\,\left(1+\mathcal{O}(\frac{L}{h})^2\right) \end{aligned}$$

I grensen blir volumstrømraten lik produktet av arealet og hastigheten midt i arealet.

**Løsning D.3**

Definer først et integral $I_N$ og beregn det:

$$\begin{aligned} I_N &= \int_A (u(r))^N\,dA \\ &= 2\pi u_m^N\int_0^R (1-(\frac{r}{R})^2)^N\,r\,dr \\ &= \pi u_m^N R^2\int_0^1 (1-x)^N\,dx \\ &= \pi u_m^N R^2\int_0^1 y^N\,dy \\ &= \frac{\pi u_m^N R^2}{N+1} \end{aligned}$$

Her har man etter tur brukt de to substitusjonene

$$(\frac{r}{R})^2 = x\ , \qquad 1-x = y$$

Med denne definisjonen er

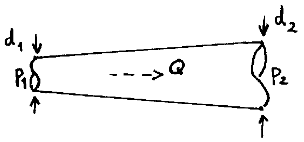
$$V = \frac{I_1}{A} = \frac{1}{2}u_m$$

og

$$\alpha = \frac{1}{V^2}\frac{I_3}{I_1} = 2$$

som man skulle vise.

**Løsning D.4**




Hastighetene følger av kontinuitetsligningen:

$$Q = \pi(\frac{D}{2})^2 V \qquad \Rightarrow$$

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \cdot 3.6}{\pi(0.6)^2}\ \text{m/s} \ = \qquad 12.7\ \text{m/s}$$

$$V_2 = (\frac{d_1}{d_2})^2 = \frac{1}{4} V_1 \ = \qquad 3.18\ \text{m/s}$$

Bruk $h_L = 0$ (friksjonsløs strøm) i energiligningen, som da tar form av Bernoullis ligning:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g} V_1^2 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g} V_2^2 \qquad (z_1 = z_2)$$

Trykkhead i den vide enden:

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho g} &= \frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g}(1 - (\frac{d_1}{d_2})^4) V_1^2 \\ &= (5 + \frac{1}{2 \cdot 9.81} \frac{15}{16} (12.7)^2)\ \text{m} \\ &= 12.7\ \text{m} \end{aligned}$$

Og trykket: $\rho g \frac{p_2}{\rho g} = 998 \cdot 9.81 \cdot 12.7\ \text{Pa} \ =$ 124.8 kPa

**Løsning D.5**

La øvre og nedre ende tilsvare henholdsvis indeks 1 og 2 på hastighet, høyde og trykk. Hvis strømmen går nedover skrives da energilikningen på tradisjonell form, med indeks 1 og 2 på henholdsvis venstre og høyre side samt $h_L$ på høyre side med plussfortegn. Går strømmen motsatt vei blir da indeks 2 begynnelses-tilstanden og kommer på venstre side, og indeks 1 sluttilstand og kommer på høyre side – og $h_L$ står fremdeles på høyre side med plussfortegn.

Vi kan da løse for tilfellene a) og b) under ett, ved å la øvre og nedre fortegn for $h_L$ i likningen under tilsvare henholdsvis strøm nedover og oppover:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g} V_1^2 + z_1^2 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g} V_2^2 + z_2^2 \pm h_L \ , \qquad z_1 - z_2 = L \ , \qquad V_1 = V_2 \quad \text{(kontinuitet)}$$

Løst:

$$\frac{p_2}{\rho g} = \frac{p_1}{\rho g} + L \mp h_L = (5 + 20 \mp 1.25)\ \text{m} \ =$$

a) $23.75$ m
b) $26.25$ m

**Løsning D.6**

Som forklart i løsningen til forrige oppgave kan vi behandle begge tilfellene under ett, ved å bruke dobbelt fortegn der øvre fortegn tilsvarer strøm nedover og nedre fortegn tilsvarer strøm oppover. Men nå kansellerer ikke hastighetsleddene. Fra kontinuitetsligningen kommer

$$V_2 = (\frac{d_1}{d_2})^2 V_1 \ = \ \frac{1}{9} V_1$$

og dermed

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho g} &= \frac{p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g}(V_1^2 - V_2^2) + L \mp h_L \\ &= (2.0 + \frac{10^2}{2 \cdot 9.81}\frac{80}{81} + 15 \mp 2.5)\ \text{m} = \end{aligned}$$

a) 19.5 m
b) 24.5 m

**Løsning D.7**

Vi bruker enda en gang tricket med å behandle begge strømretninger under ett i energiligningen, med øvre og nedre fortegn på $h_L$ for henholdsvis strøm nedover og oppover. I tillegg kommer betingelsen fra termodynamikkens 2. hovedsetning (og sunn fornuft) at $h_L > 0$.

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_A^2 + z_A = \frac{p_B}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_B^2 + z_B \pm h_L \ , \qquad V_A = V_B$$

$$\begin{aligned} h_L &= \pm(\frac{p_A - p_B}{s\rho_{\text{vann}} g + z_A - z_B}) \\ &= \pm(\frac{(150-250)\cdot 10^3}{998\cdot 0.85\cdot 9.81} + 8.0)\ \text{m} \\ &= \pm(-12.0 + 8.0)\ \text{m} = \qquad \mp 4.0\ \text{m} \end{aligned}$$

Vi må velge *nedre* fortegn fordi tapsenergien skal være positiv. Strømmen går altså *oppover*.

**Løsning D.8**

I ligningen for effekt settes $h$ lik henholdsvis hastighetshead $V^2/2g$ og tapshead for å for finne effekten som strålen kan levere og tapseffekten:

$$\begin{aligned} P_{\text{stråle}} &= \rho g Q \frac{V^2}{2g} = \frac{\pi}{8}\rho d^2 V^3 \\ P_{\text{tap}} &= \rho g Q h_L \end{aligned}$$

Hvis kontrollvolumet legges slik at bassengoverflaten blir innløp og dyseåpningen utløp, vil trykkbidragene kansellere (tilnærmet) mellom høyre og venstre side av energiligningen, siden atmosfæretrykket opptrer begge steder. Siden bassengoverflatens areal må forutsettes å være mye større enn strålens tverrsnittsareal, følger det fra kontinuitet at hastighetshead for overflatens fall kan neglisjeres. Energiligningen reduserer seg til

$$h_L = z_1 - z_2 - \frac{1}{2g}V^2 = -\Delta z - \frac{1}{2g}V^2$$

slik at

$$P_{\text{tap}} = \rho g Q(-\Delta z) - P_{\text{stråle}}$$

Utregnet:

$$P_{\text{stråle}} = \frac{\pi}{8}998(0.2)^2(68)^3\ \text{J/s} = 4.93\cdot 10\ 6\ \text{J/s} = \qquad 4930\ \text{kW}$$

$$P_{\text{tap}} = (998\cdot 9.81\frac{\pi}{4}(0.2)^2 68\cdot 250 - 4.93\cdot 10^6)\ \text{J/s} = \qquad 298\ \text{kW}$$

**Løsning D.9**

Vi lar kontrollvolumet ha innløp i det ene bassengets overflate og utløp i det andres. Trykkhead kansellerer mellom de to sidene i energiligningen, begge hastighetshead blir neglisjerbare hvis det antas at begge overflatene er vide, så energiligningen reduserer seg til:

$$h_M \;=\; z_2 - z_1 + h_L \;=\; \Delta z + h_L$$

Effektbehovet blir:

$$P = \frac{1}{\eta}\rho g Q h_M = \frac{1}{0.90} 998 \cdot 9.81 \cdot 6.0(120 + 10) \text{ J/s} \;= \qquad 8480 \text{ kW}$$

**Løsning D.10**

Ved argumenter som i Løsning 8 finner vi at

$$\frac{1}{2g} V^2 = -(z_2 - z_1) - h_L$$

slik at

$$P = \eta \rho g Q(-\Delta z - h_L) = 0.90 \cdot 998 \cdot 9.81 \cdot 2.8(185 - 7.6) \text{ J/s} \;= \qquad 4380 \text{ kW}$$

**Løsning D.11**

Siden det spørres om hvilken økning i mekanisk energi oljen får, trenger vi ikke dra inn pumpens effektivitet. I energiligningen med $z_1 = z_2$ og $h_L = 0$ blir

$$\begin{aligned}
\Delta H &= H_2 - H_1 \\
&= \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{1}{2g}(V_2^2 - V_1^2) \\
&= \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{8}{\pi^2}\frac{Q^2}{g}\left(\frac{1}{d_2^4} - \frac{1}{d_1^4}\right)
\end{aligned}$$

Dette tilsvarer effekten

$$\begin{aligned}
P &= \rho g Q \Delta H \\
&= Q(p_2 - p_1) + \frac{8}{\pi^2}\left(1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right) s \rho_{\text{vann}} \frac{Q^3}{d_2^4} \\
&= \left(0.075(125 - 40)10^3 + \frac{8}{\pi^2}\left(1 - \frac{81}{256}\right) 0.82 \cdot 998 \frac{(0.075)^2}{(0.15)^4}\right) \text{ J/s} \\
&= (6375 + 378) \text{ J/s} \\
&= 6.76 \text{ kW}
\end{aligned}$$

**Løsning D.12**

Vi velger et kontrollvolum med innløp i vannoverflaten ved nivå $z_M$ og utløp hevertens endepunktsnivå $z_N$. I energiligningen anvendt på dette kontrollvolumet vil (som forklart for eksempel i løsning 8) trykkleddene kansellere, mens innløpshastigheten kan neglisjeres sammenlignet med utløpshastigheten. Utløpshastigheten, lik hastigheten ved punkt $B$ ut fra kontinuitetsligningen, og volumstrømraten, blir følgelig:

$$V_B = V_N = \sqrt{2g(z_M - z_N)} = \sqrt{2\cdot 9.81\cdot 5}\,\text{m/s} = \qquad 9.90\,\text{m/s}$$

$$Q = \frac{\pi}{4}d^2 V_N = \frac{\pi}{2}(0.15)^2\cdot 9.90\,\text{m}^3\text{/s} = \qquad 0.175\,\text{m}^3\text{/s}$$

For å finne gaugetrykkhead ved punkt $B$ kan vi legge et kontrollvolum med innløp som før, og utløp ved punkt $B$. Energiligningen gir:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{B,\text{g}}}{\rho g} = \frac{p_B - p_M}{\rho g} &= z_M - z_B - \frac{1}{2g}V_B^2 \\
&= z_M - z_B - \frac{1}{2g}2g(z_M - z_N) \\
&= -(z_B - z_N) \\
&= -6.2\,\text{m}
\end{aligned}$$

Nøyaktig samme resultat ville selvsagt ha framkommet på en enda enklere måte om vi hadde valgt et kontrollvolum med innløp ved $B$ og utløp ved $N$. Som vi ser er det sammenheng i alt!

**Løsning D.13**

Benytt sluttresultatet i forrige oppgave:

$$\frac{p_{B,\text{g}}}{\rho g} = -(z_B - z_N)$$

Derav begrensningen på lengden av høyre hevertben:

$$\begin{aligned}
H_{2\text{maks}} &= (z_B - z_N)_{\text{maks}} \\
&= -(\frac{p_{B,\text{g}}}{\rho g})_{\text{min}} \\
&= 10.0\,\text{m}
\end{aligned}$$

*Kommentar:*
Denne og forrige oppgave er blant de ekstreme eksemplene på hvor håpløst det kan bli om man setter energisk i vei med numerisk innsetting i energiligningen, slik disse oppgavene faktisk står løst noen steder. De enkle relasjonene mellom fysiske størrelser, gitt av bevarelsessetningene, går tapt.

**Løsning D.14**

La $z_0$ og $z_B$ være henholdsvis vannoverflatens og utløpets nivå. Liksom i tidligere oppgaver:

$$V_{\text{stråle}} = \sqrt{2gh}\,, \qquad h = z_0 - z_B$$

a) Volumetrisk strømrate: $Q = \frac{\pi}{4} D^2 V_{\text{stråle}} = \frac{\pi}{4}(0.065)^2\sqrt{2\cdot 9.81\cdot 3.5}\,\text{m}^3/\text{s} \;=$ 27.5 l/s

b) Legg et kontrollvolum med innløp ved $B$ og utløp i dyseåpningen. Energiligning, kontinuitetsligning og høydebetingelse gir:

$$\begin{aligned} \frac{p_B}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_B^2 + z_B &= \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{1}{2g}{V_{\text{stråle}}}^2 + z_{\text{stråle}} \\ V_B &= (\frac{D}{d})^2 V_{\text{stråle}} \\ z_B &= z_{\text{stråle}} \end{aligned}$$

Kombinert:

$$\frac{p_{B,\text{g}}}{\rho g} = -\frac{1}{2g}{V_{\text{stråle}}}^2\left((\frac{D}{d})^4 - 1\right) = -h\left((\frac{D}{d})^4 - 1\right) = -3.5\left((\frac{0.065}{0.05})^4 - 1\right)\ \text{m} \;= \qquad -6.50\,\text{m}$$

c) Hvis det ikke var noe rør påsatt ved $B$ ville vi hatt samme utløpshastighet der som forutsatt ovenfor:

$$V_B = \sqrt{2gh}\,, \qquad h = z_0 - z_B$$

Tilhørende strømrate: $Q' = (\frac{d}{D})^2 Q = (\frac{0.05}{0.065})^2 0.0275\,\text{m}^3/\text{s} \;=$ 16.3 l/s

**Løsning D.15**

Dette er et *kavitasjonsproblem*: Hvis det absolutte trykket på pumpens innsugingsside blir lavere enn væskens damptrykk, svikter forutsetningene for energiligningen på den utledede formen (rent bortsett fra at punpen kan gå i stykker).

Legg et kontrollvolum med innløp ($A$) i væskeoverflaten og utløp ($B$) akkurat i pumpens innsugingsside. Med antagelse om at $z$-koordinatens nullpunkt ligger i væskeoverflaten, som antas å ha mye større areal enn rørets tverrsnittsareal:

$$\begin{aligned} \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + 0 + 0 &= \frac{p_{\text{v}}}{\rho g} + \frac{1}{2g}V^2 + h_{\text{maks}} + \frac{2}{2g}V^2 \\ h_{\text{maks}} &= \frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{v}}}{\rho g} - \frac{3}{2g}V^2 \end{aligned}$$

a) Vann: $h_{\text{maks}} = \left(\frac{100 - 2.34}{998\cdot 9.81}10^3 - \frac{3}{2\cdot 9.80665}(3.0)^2\right)\ \text{m} \;=$ 8.60 m

b) Bensinen: $h_{\text{maks}} = \left(\frac{100 - 50}{7000}10^3 - \frac{3}{2\cdot 9.80665}(3.0)^2\right)\ \text{m} \;=$ 5.77 m

*Kommentar:*
I denne og neste oppgave har vi approksimert tapshead med

$$h_L = \frac{c}{2g}V^2\,, \qquad c \ \text{ en konstant}$$

Dette valget er begrunnet i den senere delen av pensum som omhandler turbulent rørfriksjon. Her kan nevnes at approksimasjonen forutsetter at røret under pumpen har konstant lengde, slik at rør med pumpe må trekkes mer eller mindre opp av væsken hvis pumpens høyde skal varieres.

**Løsning D.16**

Legg et kontrollvolum med innløp i vannoverflaten ved $A$ og utløp i dysen ved $C$. I energiligningen kansellerer trykkleddene, og venstre hastighetsledd kan som tidligere forklart neglisjeres:

$$
\begin{aligned}
\frac{p_A}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_A^2 + z_A + h_P &= \frac{p_C}{\rho g} + \frac{1}{2g}V_C^2 + z_C + h_{L1} + h_{L2} \\
h_P &= z_C - z_A + \left(c_1(\frac{d_d}{d_1})^4 + c_2(\frac{d_d}{d_2})^4\right)\frac{1}{2g}V_C^2 \\
&= z_C - z_A + \frac{263}{64}\frac{1}{2g}V_C^2
\end{aligned}
$$

Ved forenklingen er kontinuitetsligningen benyttet, samt oppgitt antagelse

$$
h_{Li} = \frac{c_i}{2g}V_i^2\,, \qquad c_1 = 5\,, \qquad c_2 = 12
$$

Et annet uttrykk for $h_P$ finnes fra uttrykket for effekt:

$$
h_P = \frac{4}{\pi}\frac{P}{\rho g d_d^2}\frac{1}{V_C^2}
$$

Ved eliminasjon av $h_P$ mellom de to ligningene kan vi finne $V_C$ og dermed $Q$, men det blir ikke noen analytisk løsning. Vi setter derfor inn tallverdier fra SI-systemet, lar $x$ betegne $V_C$'s tallverdi, og får følgende ligning å løse for $x$:

$$
3 + 0.2095x^2 = \frac{231.3}{x}
$$

Ved prøving og feiling eller andre metoder:

$$
x = 9.87
$$

Alternativt kan vi legge et kontrollvolum med innløp i væskeoverflaten og utløp i pumpens sugeside. Energiligningen vil da redusere seg til

$$
\begin{aligned}
\frac{p_{B,\mathrm{g}}}{\rho g} &= \frac{p_B - p_A}{\rho g} \\
&= z_A - z_B - \frac{1}{2g}V_1^2 - h_{L1} \\
&= z_A - z_B - (1 + c_1)\left(\frac{d_d}{d_1}\right)^4 \frac{1}{2g}V_C^2 \\
&= z_A - z_B - \frac{3}{16g}V_C^2
\end{aligned}
$$

Svarene på oppgavetekstens spørsmål følger dermed:

a) Volumstrømraten: $Q = \frac{\pi}{4}(0.075)^2 9.87\,\mathrm{m^3/s} =$ 43.6 l/s

b) Trykkhead ved pumpens sugeside: $\frac{p_{B,\mathrm{g}}}{\rho g} = \left(6 - \frac{3}{16}\frac{(9.87)^2}{9.81}\right)\,\mathrm{m} =$ 4.14 m

**Løsning D.17**

Stagnasjonstrykket: $p_{0,\mathrm{g}} = s\rho_{\mathrm{vann}} g h + \frac{1}{2}s\rho_{\mathrm{vann}}V^2 = 1.025 \cdot 998\left(9.81 \cdot 25 + \frac{(7.7)^2}{2}\right)\,\mathrm{Pa} = 281\,\mathrm{kPa}$

**Løsning D.18**

"Brannmannsproblemet" er egentlig en kast-oppgave av en type kjent fra punktpartikkeldynamikk. Vi inkluderer det for fullstendighets skyld.

Horisontal og vertikal komponent av baneligningen gir:

$$\begin{aligned} L &= V\cos\theta\cdot t \\ h &= h_0 + V\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Eliminasjon av trefftiden $t$ gir:

$$\begin{aligned} a\cos^2\theta + c &= b\sqrt{1-\cos^2\theta}\cos\theta \\ a &= h - h_0 \\ b &= L \\ c &= \frac{1}{2}\frac{gL^2}{V^2} \end{aligned}$$

Løst og uttrykt ved siktevinkelen $\theta'$ mot vinduet:

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \cos^2\theta'\cdot\frac{1}{2}\left\{1 - \frac{2ac}{b^2} \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2} - \frac{4c^2}{b^2}}\right\} \\ \cos\theta' &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

For i det hele tatt å få reell løsning:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{4ac}{b^2} - \frac{4c^2}{b^2} &\geq 0 \\ 1 - 2(h-h_0)\frac{g}{V^2} - \frac{L^2g^2}{V^4} &\geq 0 \\ 0 \leq \frac{g}{V^2} \leq \frac{1}{L^2}\left\{\sqrt{(h-h_0)^2+L^2} - (h-h_0)\right\} &= \frac{1}{b^2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right) \end{aligned}$$

Grenseverdien for $V$ tilsvarer

$$\begin{aligned} c = c_{\text{lim}} &= \frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2} - a) \\ 1 - \frac{2ac_{\text{lim}}}{b^2} &= \frac{2ac_{\text{lim}}}{b^2} + \frac{4{c_{\text{lim}}}^2}{b^2} \end{aligned}$$

Vi krever

$$\begin{aligned} V \geq V_{\text{lim}} &= \sqrt{\frac{gL^2}{\sqrt{(h-h_0)^2+L^2} - (h-h_0)}} \\ &= \sqrt{\frac{9.81\cdot(23)^2}{\sqrt{(12.5)^2+(23)^2} - 12.5}}\ \text{m/s} \\ &= 19.5\ \text{m/s} \end{aligned}$$

som er oppfylt for oppgavetekstens tallverdi. I samme grense:

$$\cos^2\theta_{\text{lim}} = \frac{b^2}{a^2+b^2}\frac{1}{2}\left\{\frac{2ac_{\text{lim}}}{b^2} + \frac{4{c_{\text{lim}}}^2}{b^2}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{c_{\text{lim}}}{a^2+b^2}(a+2c_{\text{lim}}) \\
&= \frac{c_{\text{lim}}}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)
\end{aligned}
$$

Med våre tallverdier for $a$ og $b$ fås

$$\cos\theta_{\text{lim}} = 0.511$$

som altså tilsvarer *minimal* utgangshastighet og *ikke* $V = 25$ m/s. Vi innser at dette tilsvarer at strålen har sitt toppunkt i vinduet, og at dette blir truffet horisontalt.

Med $V = 25$ m/s, derimot:

$$\frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{L^2}{(h-h_0)^2+L^2} = \quad 0.772$$

$$1-\frac{2ac}{b^2} = 1-\frac{(h-h_0)g}{V^2} = \quad 0.804$$

$$1-\frac{4ac}{b^2}-\frac{4c^2}{b^2} = 1-\frac{2(h-h_0)g}{V^2}-\frac{g^2L^2}{V^4} = \quad 0.478$$

Begge fortegn i uttrykket for $\cos^2\theta$ gir fysisk gyldige verdier:

$\cos^2\theta = 0.5770$ (strålen treffer nedenfra:) $\theta = 40.6^{\text{o}}$

$\cos^2\theta = 0.0436$ (strålen treffer ovenfra:) $\theta = 80.0^{\text{o}}$

**Løsning D.19**

Vi relaterer trykket midt i tverrsnitt 2 til trykket midt i tverrsnitt 1 ved å bruke fluidstatikkens grunnligning på integrert form langs en vei gjennom manometeret:

$$p_1 + \rho g z - s\rho_{\text{vann}} g M - \rho g(z-M) = p_2$$

Eller:

$$M_{\text{piezo}} = \frac{\dfrac{p_1-p_2}{\rho g}}{s\dfrac{\rho_{\text{vann}}}{\rho}-1}$$

Hvis nedstrøms piezometerrør blir erstattet med et pitotrør med motstrøms åpning midt i tverrsnittet, fås en tilsvarende regning. Eneste forskjell er at nedstrøms trykk nå blir erstattet av tilsvarende stagnasjonstrykk:

$$M_{\text{pitot}} = \frac{\dfrac{p_1-(p_2)_0}{\rho g}}{s\dfrac{\rho_{\text{vann}}}{\rho}-1}$$

Bernoullis ligning med $z_1 = z_2$ gir trykkdifferansen mellom de to tverrsnittene:

$$\frac{p_1-p_2}{\rho g} = \frac{1}{2g}(V_2^2-V_1^2) = \frac{1}{2\cdot 9.81}((18)^2-5^2)\text{ m} = \quad 15.2\text{ m}$$

For en ideell strøm er

$$(p_1)_0 = (p_2)_0$$

slik at ut fra stagnasjonstrykkdefinisjonen får vi

$$\frac{p_1 - (p_2)_0}{\rho g} = -\frac{1}{2g}V_1^2 = -\frac{1}{2 \cdot 9.81}5^2 \text{ m } = \qquad -1.27\,\text{m}$$

I nevneren i uttrykkene for $M$ inngår $\quad s\frac{\rho_{\text{vann}}}{\rho} - 1 = 1.594\frac{998}{850} - 1 = \qquad 0.872$

Svarene på oppgavetekstens spørsmål følger dermed:

a) I piezometertilfellet: $\quad M_{\text{piezo}} = \frac{15.2}{0.872} \text{ m } = \qquad 17.5\,\text{m}$

b) I pitottilfellet: $\quad M_{\text{pitot}} = \frac{-1.27}{0.872} \text{ m } = \qquad -1.46\,\text{m}$

*Kommentarer:*
Opplysningen i oppgaveteksten om trykket i oppstrøms tverrsnitt er selvsagt unødvendig så lenge fluiden som strømmer er inkompressibel. Den negative verdien i et av tilfellene tilsvarer at $CCl_4$ står høyest i venstre gren. – Tallverdiene viser forøvrig at målemetoden er direkte upraktisk i minst ett av tilfellene, medmindre $CCl_4$ blir erstattet med den tyngre væsken Hg.

Denne siden er
med fullt overlegg
(nesten) BLANK