UNIVERSITETET I STAVANGER 13. MAI 2005

Eksamen i **TE0347/BIT260 Fluidmekanikk**

Kortfattet løsningsforslag

1.

a)
Arkimedes' lov brukes for å finne oppdriften på hver kule. Beregn vekten av en kule med samme radius, men spesifikk tetthet lik 1:

$$W_{\text{vann}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{vann}} g = \frac{4}{3}\pi (0.55)^3 998 \cdot 9.807\,\text{N} = \qquad 6.82\,\text{kN}$$

Med de oppgitte verdiene av W_1 og W_2 finner vi da:

$$W_1 < W_{\text{vann}}\ , \qquad W_2 > W_{\text{vann}}\ , \qquad W_1 + W_2 < 2W_{\text{vann}}$$

Hvis systemet av de to sammenbundne kulene var helt neddykket, ville det til sammen få en oppdrift større enn totalvekten. Derfor vil den letteste bli flytende i overflaten, delvis neddykket, mens den tyngste vil henge rett under den i tauet og være helt neddykket – slik som på figuren.

b)
La O_1 og O_2 betegne oppdriftene på henholdsvis øverste og nederste kule. Vertikal likevekt for nederste kule gir:

$$O_2 + T - W_2 = 0 \qquad (O_2 = W_{\text{vann}})$$

$$T = W_2 - W_{\text{vann}} = (8.5 - 6.82)\,\text{kN} = \qquad 1.68\,\text{kN}$$

c)
Med et "masseløst" tau er taustrekket det samme på øverste og nederste kule. Vertikal likevekt for øverste kule gir:

$$O_1 - T - W_1 = 0 \qquad (O_1 = (1-x)W_{\text{vann}} = (1-x)O_2)$$

$$\begin{aligned}(1-x)W_{\text{vann}} &= O_1 \\ &= T + W_1 \\ &= W_1 + W_2 - W_{\text{vann}}\end{aligned}$$

Volumfraksjonen av øvre kule over vannoverflaten:

$$x = 2 - \frac{W_1 + W_2}{W_{\text{vann}}} = 2 - \frac{3.5 + 8.5}{6.82} = \qquad 24.1\,\%$$

2.

a)
Legg et kontrollvolum inni dysen. Hvis F_x (definert positiv i strømretningen som velges som x-retning) er kraftkomponent i strømretningen som overføres fra vannet til dysen, så blir $-\boldsymbol{F}_x$ kraften overført til vannet. Impulssats og kontinuitetsligning gir:

$$-F_x + p_{1,\text{g}}\frac{\pi}{4}D_1^2 - p_{2,\text{g}}\frac{\pi}{4}D_2^2 = \rho\frac{\pi}{4}D_1^2 V_1(V_2 - V_1) \qquad (p_{2,\text{g}} = p_{\text{atm,g}} \stackrel{\text{def}}{=} 0)$$

$$V_1 \frac{\pi}{4} D_1^2 = V_2 \frac{\pi}{4} D_2^2$$

Sammenholdt:

$$\begin{aligned}
F_x &= \frac{\pi}{4} D_1^2 \left[p_{1,\mathrm{g}} - \rho V_1^2 \left((\frac{D_1}{D_2})^2 - 1 \right) \right] \\
&= \frac{\pi}{4} (0.1)^2 \left[206700 - 998 (5.0)^2 \left((\frac{0.10}{0.05})^2 - 1 \right) \right] \ \mathrm{N} \\
&= 1.036\,\mathrm{kN} \qquad \text{(dvs. vannet skyver selve dysen i stråleretningen)}
\end{aligned}$$

b) Tapshead, direkte fra energiligningen ("Bernoullis ligning med tapsledd"):

$$\begin{aligned}
h_L &= \frac{p_1}{\rho g} - \frac{p_2}{\rho g} + \frac{1}{2g}(V_1^2 - V_2^2) \\
&= \frac{p_{1,\mathrm{g}}}{\rho g} - \frac{1}{2g} V_1^2 \left((\frac{D_1}{D_2})^4 - 1 \right) \\
&= \left[\frac{206.7 \cdot 10^3}{998 \cdot 9.807} - \frac{1}{2 \cdot 9.807} (5.0)^2 \left((\frac{0.10}{0.05})^4 - 1 \right) \right] \ \mathrm{m} \\
&= (21.12 - 19.12)\,\mathrm{m} \\
&= 2.00\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

c)
I uttrykket for P_{tap} innføres $Q = \frac{\pi}{4} D^2 V$. Tapsenergi i dysen pr. tidsenhet blir da:

$$P_{\mathrm{tap}} = \tfrac{\pi}{4} \rho_{\mathrm{vann}} g D_1^2 V_1 h_L = \tfrac{\pi}{4} \times 998 \times 9.807 \times (0.1)^2 \times 5.0 \times 2.00\,\mathrm{W} = \qquad 769\,\mathrm{W}$$

3.

a)
Uttrykket for h_L omformes til (med SI-enhetene undertrykt i notasjonen):

$$f V^2 = 2 g D \frac{h_L}{L} = 2 \times 9.807 \times 0.1 \times \frac{1.0}{87.0} = \qquad 0.02254$$

eller:

$$V = \frac{0.1502}{\sqrt{f}}$$

b)
Istedenfor å bruke ovenstående uttrykk til å beregne V og deretter Re på hvert trinn i iterasjonen, kan uttrykket for $V = V(f)$ sammen med D- og ν-verdiene settes inn i uttrykket for Re slik at man finner

$$\mathrm{Re} = \frac{14870}{\sqrt{f}}$$

Dette uttrykket kan, sammen med Moody-diagrammet, itereres med startverdi lik den asymptotiske verdien $f_{\mathrm{start}} \approx 0.0198$ for $\epsilon / D = 0.001$, til å gi (med diskutabel avlesningsnøyaktighet):

f	0.0198	0.0220	0.0225	0.0225
Re	105650	100230	99170	
f	0.0220	0.0225	0.0225	

Dvs. med tilstrekkelig nøyaktighet: $V = \dfrac{0.1502}{\sqrt{0.0225}}\,\mathrm{m/s} =$ $1.00\,\mathrm{m/s}$

c)
Volumetrisk strømrate:

$Q = \frac{\pi}{4}D^2V = \frac{\pi}{4}(0.1)^2 \times 1.0\,\mathrm{m^3/s} =$ $7.85\,\mathrm{l/s}$

4.

a)
Hastighetskomponenter:

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = ax \\
v &= -\frac{\partial \phi}{\partial y} = ay \\
w &= -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -2az
\end{aligned}
$$

b)
$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \dfrac{\partial(ax)}{\partial x} + \dfrac{\partial(ay)}{\partial y} + \dfrac{\partial(-2az)}{\partial z} = a + a - 2a = 0 \quad \Rightarrow$ Kontinuitetsligningen er oppfylt

c)
$\xi_z = \dfrac{\partial(ay)}{\partial x} - \dfrac{\partial(ax)}{\partial y} = 0 - 0 =$ 0

d)
Bare konvektiv akselerasjon her, siden $\boldsymbol{u}$-komponentene er tidsuavhengige for gitt (x, y, z):

$$
\begin{aligned}
a_x &= \left(ax\frac{\partial}{\partial x} + ay\frac{\partial}{\partial y} - 2az\frac{\partial}{\partial z}\right)(ax) = a^2x \\
a_y &= \left(ax\frac{\partial}{\partial x} + ay\frac{\partial}{\partial y} - 2az\frac{\partial}{\partial z}\right)(ay) = a^2y \\
a_z &= \left(ax\frac{\partial}{\partial x} + ay\frac{\partial}{\partial y} - 2az\frac{\partial}{\partial z}\right)(-2az) = 4a^2z
\end{aligned}
$$

e)
En strømfunksjon eksisterer bare for 2D strømfelter.

f)

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{ay} &= -\frac{dz}{2az} \\
\ln y &= -\frac{1}{2}\ln z + C_1 \\
y &= \frac{1}{\sqrt{z}}e^{C_1}
\end{aligned}
$$

Strømlinjer i yz-planet er altså gitt ved

$$y\sqrt{z} = C$$

der konstanten C har en gitt verdi for hver strømlinje.