HØGSKOLEN I STAVANGER 15. MAI 2001

Eksamen i **TE 347 Fluidmekanikk**

Kortfattet løsningsforslag

1.

a)
Hvis inkompressibel fluid og konstant indre rørtverrsnitt, vil høyre Hg-søyle stige like mye som venstre faller, pga. kontinuitet. Derfor vil den nye Hg-nivådifferansen bli dobbelt så stor som fallhøyden til venstre Hg-søyle.

b)

$$p_A = p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}g\Delta h_1 - \rho_{\text{vann}}g\Delta H_1$$

c)

$$\begin{aligned} 2p_A &= p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}g\Delta h_2 - \rho_{\text{vann}}g\Delta H_2 \\ &= p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}g(\Delta h_1 + 2x) - \rho_{\text{vann}}g(\Delta H_1 + x) \end{aligned}$$

d)
Multipliser ligningen fra b) med (-2) og den fra c) med 1. Legg dem sammen; da forsvinner p_A, og tilbake står et resultat som kan løses mhp. x:

$$0 = p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}g(\Delta h_1 - 2x) - \rho_{\text{vann}}g(\Delta H_1 - x)$$

$$x = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{vann}}g(2s_{\text{Hg}} - 1)} + \frac{s_{\text{Hg}}\Delta h_1 - \Delta H_1}{2s_{\text{Hg}} - 1}$$

e)
Med innsatte tallverdier:

$$\begin{aligned} \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{vann}}g(2s_{\text{Hg}} - 1)} &= 0.3894\,\text{m} \\ \frac{s_{\text{Hg}}\Delta h_1 - \Delta H_1}{2s_{\text{Hg}} - 1} &= -0.1394\,\text{m} \end{aligned}$$

Følgelig:

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 + 2x = 0.600\,\text{m}$$

2.

a)
(Bør være tilstrekkelig å si dette med ord, såfremt klart:)

Legg et kontrollvolum med innløp i hevertens innløp og utløp i dens utløp. I energiligningen får z samme verdi ved innløp og utløp, samt V samme verdi pga. kontinuitet, forutsatt inkompressibel fluid. Energiligningen gir da at også trykkene må være like:

$$p_{1,\text{gauge}} = p_{2,\text{gauge}} = (p_{\text{atm}})_{\text{gauge}} = 0$$

b)
Her og i neste punkt antas $\boldsymbol{F} = (F_H, F_V)$ å virke på heverten, slik at $-\boldsymbol{F}$ virker på vannet i heverten og altså blir den størrelsen som inngår i impulssatsen. La V være vannets skalare strømhastighet i hevertrøret:

$$\begin{aligned}\Sigma(\boldsymbol{F}^{\text{på vann}})_x &= -F_H + p_1 A - p_2 A \\ &= \rho Q(\boldsymbol{V}_x^{\text{ut}} - \boldsymbol{V}_x^{\text{inn}}) \\ &= \rho A V(V - V)\end{aligned}$$

dvs. $F_H = 0$

c)
Tilsvarende i vertikal retning, men vannets tyngde kommer i tillegg:

$$\begin{aligned}\Sigma(\boldsymbol{F}^{\text{på vann}})_y &= -F_V + 0 - 0 - \rho_{\text{vann}} g \cancel{V} \\ &= \rho Q(\boldsymbol{V}_y^{\text{ut}} - \boldsymbol{V}_y^{\text{inn}}) \\ &= \rho A V(0 - 0)\end{aligned}$$

dvs. $F_V = -\rho_{\text{vann}} g \cancel{V} = -998 \times 9.807 \times 0.2043\,\text{N} = -2.000\,\text{kN}$

d)
Legg så kontrollvolumet i energiligningen i hevertrøret mellom hevertens topp og dens utløp. Fremdeles er $V_{\text{topp}} = V_{\text{ut}}$ pga. kontinuitetsligningen for en inkompressibel fluid:

$$\frac{p_{\text{topp}}}{\rho g} + \frac{(V_{\text{topp}})^2}{2g} + z_1 = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{(V_{\text{ut}})^2}{2g} + z_2$$

$$H = z_1 - z_2 = \frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{topp}}}{\rho g}$$

Kavitasjon må unngås:

$$\begin{aligned}H_{\text{maks}} &= \frac{p_{\text{atm}} - (p_{\text{topp}})_{\min}}{\rho g} \\ &= \frac{p_{\text{atm}} - p_{\text{vann}}^{\text{vap}}}{\rho g}\end{aligned}$$

dvs. $H_{\text{maks}} = \frac{101680 - 2340}{998 \times 9.807}\,\text{m} = 10.15\,\text{m}$

<u>3.</u>

a)

$$v_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

$$v_t = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r}$$

b)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_t}{\partial \theta} = 0 + 0 + 0 = 0\text{; kontinuitet oppfylt!}$$

c)

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \frac{\partial v_t}{\partial r} + \frac{v_t}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r^2} + 0 = 0$$

0 virvling medfører at et hastighetspotensial eksisterer, noe som var grunnen til at det kunne oppgis.

d)

$$\Gamma \;=\; \oint_L \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{L} \;=\; \oint_L u_t\cdot dL \;=\; \frac{\gamma}{2\pi r}\,2\pi r \;=\; \gamma$$

e)
Siden $\boldsymbol{u}$ ikke avhenger eksplisitt av tiden, får akselerasjonen bare konvektive bidrag:

$$a_r \;=\; \{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\}_r \;=\; (v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_t\frac{\partial}{\partial\theta})\,0 - \frac{1}{r}v_t^2 \;=\; -\frac{1}{r}(\frac{\gamma}{2\pi})^2\frac{1}{r^2} \;=\; -(\frac{\gamma}{2\pi})^2\frac{1}{r^3}$$

$$a_t \;=\; \{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\}_t \;=\; (0\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_t(\to 0))v_t + \frac{1}{r}0v_t \;=\; 0$$

Akselerasjonen har 0 tangensialkomponent, og $a_r < 0$ i alle punkter utenom origo. $\boldsymbol{a}$ peker derfor alltid mot origo.

f)
$v_r = 0$ medfører ren sirkelbevegelse: Strømlinjene blir konsentriske sirkler med sentrum i origo, der $v_t > 0$ medfører retningspiler som angir positiv dreieretning. (Tegn sjøl!)

4.

a)
Dimensjonsbalanse:

$$[MLT^{-2}] \;=\; [L]^a\,[ML^{-3}]^b\,[L]^d\,[LT^{-1}]^e$$

$$\begin{aligned} M: &\quad 1 = b \\ L: &\quad 1 = a - 3b + d + e \\ T: &\quad -2 = -e \end{aligned}$$

Løst (med 3 ligninger og 4 ukjente er det en ukjent, her valgt som a, som ikke kan bestemmes):

$$\begin{aligned} b &= 1 \\ d &= 2 - a \\ e &= 2 \end{aligned}$$

b)
Med ovenstående resultat innsatt:

$$F_S \;=\; K\lambda^a\rho D^{2-a}c^2 \;=\; K\rho D^2C^2(\frac{\lambda}{D})^a$$

Med omdøpingen

$$\phi(\frac{\lambda}{D}) \;=\; K(\frac{\lambda}{D})^a$$

har man direkte det resultatet man ble bedt om å vise:

$$\frac{F_S}{\rho D^2c^2} = \phi(\frac{\lambda}{D})$$

c)
Bruker man relasjonen fra b) under slike forhold at $\lambda_1/D_1 = \lambda_2/D_2$, så er $\phi(\lambda_1/D_1) = \phi(\lambda_2/D_2)$, og det følger at

$$\frac{F_{S,1}}{\rho_1 D_1^2c^2} \;=\; \frac{F_{S,2}}{\rho_2 D_2^2c^2}$$

$$\frac{F_{S,1}}{\lambda_1^{-2} D_1^2} = \frac{F_{S,2}}{\lambda_2^{-2} \rho_2 D_2^2}$$

$$\frac{F_{S,1}}{F_{S,2}} = (\frac{\lambda_2}{D_2})/(\frac{\lambda_1}{D_1}) = 1$$

altså samme forutsagte verdi for F_S i begge tilfeller, uavhengig av diameterforskjellen.

5.

a)
Uttrykket for h_L omformes til (med SI-enhetene undertrykt i notasjonen):

$$fV^2 = 2gD\frac{h_L}{L} = 2 \times 9.807 \times 0.3 \times \frac{9.034}{112.9} = 0.47084$$

eller:

$$V = \frac{0.6862}{\sqrt{f}}$$

b)
Innsetting av uttrykket for V, samt D- og ν-verdiene, i uttrykket for Re gir

$$\text{Re} = \frac{10293}{\sqrt{f}}$$

Dette kan, sammen med Moody-diagrammet, itereres fra $f_{\text{start}} = 0.0136$ til å gi (med diskutabel avlesningsnøyaktighet):

f	0.0136	0.02	0.0205	0.0206	0.0206
Re	88260	72780	71890	71882	–

Dvs. med tilstrekkelig nøyaktighet: $$V = \frac{0.6862}{\sqrt{0.0206}}\,\text{m/s} = 4.78\,\text{m/s}$$

c)
I uttrykket for P_{tap} innføres $Q = \frac{\pi}{4}D^2V$. Tapseffekten blir da:

$$P_{\text{tap}} = \frac{\pi}{4}s_{\text{olje}}\rho_{\text{vann}}gD^2Vh_L = \frac{\pi}{4} \times 0.952 \times 998 \times 9.807 \times (0.3)^2 \times 4.78 \times 9.034\,\text{W} = 28.4\,\text{kW}$$