



HØGSKOLEN I STAVANGER

DATO: 12. desember 2003

AVDELING FOR TEKNISK - NATURVITENSKAPELIGE FAG

EKSAMEN I: TE 6048 Kaotiske dynamiske systemer
MPT110 Kaotiske dynamiske systemer

VARIGHET: 4 timer

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator
Rottmanns formelsamling
Devaneys lærebok

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 2 SIDER

MERKNADER: Alle oppgavene skal besvares.
Hver av de 4 oppgavene teller like mye.

OPPGITT:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$$

$$z^4 + 2cz^2 - z + c^2 + c = (z^2 + z + c + 1)(z^2 - z + c)$$

Oppgave 1

Funksjonen $F_{\sigma} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ er gitt ved $F_{\sigma}(x) = x^2 + \sigma$, der $\sigma \in \mathbf{R}$ er en parameter. Anta at du skal løse ligningen $F_{\sigma}(x) = 0$ ved Newtons metode.

a) Finn Newtons iterasjonsfunksjon $NF_{\sigma}(x)$. Bestem for hvilke verdier av σ man kan finne en løsning ved bruk av Newtons metode.

b) Tegn en typisk skisse for $\sigma < 0$ som inkluderer grafene for F_{σ} og NF_{σ} samt diagonalen. Vis hvordan man finner NF_{σ} 's fikspunkter ved grafisk analyse.

c) Anta at $\sigma = -1$. Finn NF_{-1} 's fikspunkter ved regning, og bestem ved regning om de er tiltrekkende, nøytrale eller frastøtende.

d) Finn NF_{-1} 's kritiske punkter. Hvordan er disse beliggende i forhold til fikspunktene? Hva kalles slike fikspunkter?

(Vend)

Oppgave 2

La $NF_\sigma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ være Newtons iterasjonsfunksjon assosiert til en annen funksjon $F_\sigma : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ som er gitt ved $F_\sigma(x) = x^2 + \sigma$.

a) Vis ved eksplisitt regning at det finnes en samtilthet $H(x)$ mellom spesialtilfellet for $\sigma = 1$ og det generelle tilfellet $\sigma > 0$:

$$H(x) = \sqrt{\sigma}x \quad \Rightarrow \quad H \circ NF_1(x) = NF_\sigma \circ H(x)$$

b) Tegn samtilthets diagram for ovenstående relasjon.

c) Det er kjent at $NF_1(x)$ er samstilt med den kaotiske fordoblingsfunksjonen $D(x) = 2x \bmod 1$. Forklar hva man derfor kan slutte om kaosegenskapene til $NF_\sigma(x)$ for vilkårlig $\sigma > 0$.

Oppgave 3

a) Beregn summen av lengdene av alle intervaller som blir fjernet fra intervallet $[0,1]$ ved konstruksjonen av Cantors midtre-*femdel*-sett.

b) Beregn avstanden mellom sekvensene $\mathbf{s} = (\overline{0})$ og $\mathbf{t} = (\overline{01})$ i sekvensrommet på 2 symboler.

Oppgave 4

Den komplekse kvadratiske avbildningen $Q_c : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ er gitt ved $Q_c(z) = z^2 + c$, med $c, z \in \mathbf{C}$.

a) Vis at Q_c har et periodisk punkt med primærperiode 2 for hver rot i ligningen $z^2 + z + c + 1 = 0$.

b) Vis at de to røttene q_1 og q_2 i ligningen under punkt a) oppfyller relasjonen $c + 1 = q_1 q_2$, samt at $(Q_c^2)'(q_1) = (Q_c^2)'(q_2) = 4q_1 q_2$.

c) Vis at $Q_c(z)$ har en tiltrekkende 2-syklus i den delen av Mandelbrot-settet som tilsvarer c -verdier inni sirkelen med radius $1/4$ omkring $c = -1$.¹

1