



Universitetet
i Stavanger

DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

EKSAMEN I: BIT180 Statistisk fysikk **DATO:** 24. august 2005

TID FOR EKSAMEN: kl. 09-13 (4 timer)

TILLATTE HJELPEMIDDEL: Kalkulator, K.J. Knutsens og Rottmanns formelsamlinger

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 4 OPPGAVER PÅ 3 SIDER INKL. DENNE FORSIDEN

MERKNADER: —

OPPGITT:

$$P_0 = 101325 \text{ Pa} \quad (\text{normalatmosfæretrykket}) , \quad k = 8.62 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

$$\beta = \frac{1}{kT} , \quad R = N_A k$$

$$\mathcal{Z} = \sum_{Nr} e^{-\beta(\mu N - E_{Nr})} , \quad p_{Nr} = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{\beta(\mu N - E_{Nr})} , \quad \bar{f} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{Nr} f_{Nr} p_{Nr}$$

$$\bar{N} = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} , \quad \Omega = -kT \ln \mathcal{Z}$$

$$dE = dQ - PdV , \quad H = E + PV$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V} , \quad \Delta S = \frac{\Delta Q}{T} , \quad V_{\text{molar}} = \frac{M}{\rho}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \right)_V , \quad \bar{\epsilon}_{\text{vib}} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{\text{vib}} , \quad Z_{\text{vib}} = \sum_{\alpha} e^{-\beta \epsilon_{\alpha}^{\text{vib}}}$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} a^r = \frac{1}{1-a} , \quad e^{\pm x} = 1 \pm x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

$$\sum_i \nu_i \mu_i = 0 , \quad \mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial N_i} \right)_{T,P,N_j(j \neq i)}$$

Oppgave 1

Svar kort men fyldestgjørende:

- a) Beskriv hva som menes med begrepene makrotilstand og mikrotilstand.
- b) Forklar begrepet statistisk vekt.
- c) Hva kalles loven som sier at magnetiseringen av et paramagnetisk fast stoff, for gitt B , er $\propto 1/T$?
- d) Ved likevekt har S et maksimum, men hvordan er det med F og G ved likevekt?
- e) Hva sier termodynamikkens 3. lov?
- f) Forklar hva Joule-effekten er.
- g) Hva er “ f ” som inngår for eksempel i utledningen av Debyes uttrykk for spesifikk varmekapasitet for et fast stoff?
- h) Forandrer hastighetsfordelingen til molekylene i en gass seg på grunn av krefter (vekselvirkninger) mellom molekylene? Hvorfor?
- i) Er μ positivt eller negativt, for henholdsvis fermioner og bosoner?
- j) Hva står μ for i elektrongassen i et metall ved $T = 0$?
- k) Nederst på første side finner du den grunnleggende likevektsbetingelsen for kjemiske reaksjoner. Forklar hva den uttrykker.

Oppgave 2

En halvleder inneholder n donornivåer. Hvert av dem kan være tomt, eller fylt med høyst ett elektron som kan ha spinn enten opp eller ned. Et elektron i et donornivå har energi $-\epsilon_0$, ellers 0. Et donornivå er tomt eller fylt uavhengig av tilstanden i de andre donornivåene. Det totale antallet av elektroner i donornivåene varierer altså.

a) Bevis uttrykket $\overline{N} = -\partial\Omega/\partial\mu$ oppgitt på forsiden av oppgavesettet, på bakgrunn av det generelle definisjonsuttrykket for \mathcal{Z} på side 1.

b) *Oppgitt:* Den store partisjonsfunksjonen \mathcal{Z} for systemet som består av elektronene i donornivåene kan skrives som

$$\mathcal{Z}(T, V, \mu) = (1 + 2e^{\beta(\mu + \epsilon_0)})^n$$

Bruk uttrykket for \overline{N} til å finne n_d , antallet av elektroner inneholdt i donornivåene, ut fra ovenstående oppgitte uttrykk for \mathcal{Z} !

c) *Utled* ovenstående oppgitte uttrykk for \mathcal{Z} . (Bruk at Σ_{N_r} i dette tilfellet kan skrives som produkt over alle nivåene av summen over mulige tilstander i ett nivå, og vis regningen!)

Oppgave 3

Ved atmosfæretrykk ($P = P_0$) kan tinn ha to forskjellige krystallstrukturer avhengig av temperaturen. For $T < T_l$ er grått tinn stabilt, for $T > T_l$ er hvitt tinn stabilt, der $T_l = 291$ K er likevektstemperaturen. Overgangsentalpien pr. mol er $\Delta H = 2238$ J/mol, og tetthetene for grått og hvitt tinn er henholdsvis $\rho_g = 5750$ kg/m³ og $\rho_h = 7300$ kg/m³. Molvekt for tinn er $M = 0.1187$ kg/mol.

a) Vis, ved bruk av 1. hovedsetning for reversibel prosess og definisjonen av H , at for en prosess ved gitt trykk ($dP = 0$) er $dQ = dH$.

b) Utled følgende uttrykk for dP/dT (det lokale stigningstallet til likevektskurven for grått/hvitt tinn i et T - P -diagram) fra Clausius-Clapeyrons ligning (vis regningen!):

$$\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta H \rho_g \rho_h}{T M (\rho_g - \rho_h)}$$

c) Beregn tallverdien av dP/dT for $T = T_l$ og $P = P_0$. Anta at dette stigningstallet for likevektslinjen er forholdsvis konstant når P varierer. Hva ville likevektstemperaturen da være hvis P var lik 100 atm istedenfor 1 atm?

Oppgave 4

Et diatomisk molekyl kan approksimeres som en endimensjonal harmonisk oscillator med sirkelfrekvens ω . Ifølge kvantemekanikken har et slikt system et uendelig sett av ikke-degenererte energinivåer $\hbar\omega(r + \frac{1}{2})$, $r = 0, 1, 2, \dots \infty$.

a) Utled at uttrykket for vibrasjonspartisjonsfunksjonen for ett molekyl blir (vis regningen!)

$$Z_{\text{vib}} = \frac{e^{-x/2}}{1 - e^{-x}}, \quad x = \beta\hbar\omega = \frac{\Theta_{\text{vib}}}{T}, \quad \Theta_{\text{vib}} = \frac{\hbar\omega}{k}$$

b) Utled at bidraget til spesifikk varmekapasitet som skyldes vibrasjonene, for 1 mol av gassen, blir (vis regningen!)

$$C_{\text{vib}} = R x^2 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

c) Anta at $\hbar\omega = 0.3$ eV (approksimativ verdi for N₂), og beregn Θ_{vib} . Beregn også x for $T = 1000$ K, og finn verdien av C_{vib}/R . Hva blir C_{vib}/R istedet hvis $T \gg \Theta_{\text{vib}}$? Er vibrasjonsfrihetsgradene mye eller lite eksitert for nitrogen ved værelsestemperatur?