DATO: 20. desember 1995

EKSAMEN I: TE 515 Kaotiske dynamiske systemer

VARIGHET: 4 **timer**

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator
Devaneys lærebok

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 2 **SIDER**

MERKNADER: Alle oppgavene skal besvares.
Hver av de 4 oppgavene teller like mye.

Oppgave 1

a) La $F_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være gitt ved $F_\lambda(x) = x + x^2 + \lambda$, med $\lambda \in \mathbf{R}$. For hvilke λ-verdier har avbildningen et tiltrekkende fikspunkt?

b) Finn eventuelle λ-verdier (≤ 0) som gir henholdsvis sadelnode- og periodedoblingsbifurkasjon, og angi hvilke(t) fikspunkt(er) det i så fall er snakk om.

I resten av oppgave 1 lar du $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være gitt ved $F(x) = x + x^2 - 1$.

c) Er $x = -2$ et endefikspunkt ("eventually fixed point")? Kan du, ut fra det, slutte noe om hvorvidt venstre fikspunkt er svakt tiltrekkende?

d) Finn eventuelle kritiske punkter. Er de degenererte? Er noe fikspunkt superstabilt?

e) Beregn $SF(x)$. Kan Schwarz' min-max-prinsipp anvendes på grafen for F, og finner du i så fall overensstemmelse? Bestem F's strakstiltrekningsbasseng for eventuelle tiltrekkende eller svakt tiltrekkende fikspunkter. Hvordan stemmer resultatet med det kritiske punktets beliggenhet?

(Vend)

Oppgave 2

a) Beregn avstanden mellom sekvensene $\mathbf{s} = (\overline{100})$ og $\mathbf{t} = (\overline{010})$ i sekvensrommet på 2 symboler.

b) Finn en samstilthet ("conjugacy") mellom $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$, definert på $[-2, 2]$, og $F_4(x) = 4x(1 - x)$, definert på $[0, 1]$. (*Tips:* Prøv en lineær funksjon $L : [-2, 2] \to [0, 1]$.) Tegn kommutativt diagram.

Oppgave 3

a) Betrakt fraktalen hvor første trinn i konstruksjonen er vist på figuren. Tegn (omhyggelig) de to neste av iterasjonene som inngår i fraktalens konstruksjon. Beregn dens fraktale og topologiske dimensjon.

b) Beregn det nøyaktige arealet av Kochs snøfnugg. (Anta at konstruksjonen startet med en trekant med sidelengde 1.)

Oppgave 4

Den komplekse kvadratiske avbildningen $Q_c : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ er gitt ved $Q_c(z) = z^2 + c$, med parameteren $c \in \mathbf{C}$.

a) Vis at Q_c har et periodisk punkt med primærperiode 2 for hver rot i likningen $z^2 + z + c + 1 = 0$.

b) Vis at Q_c har en tiltrekkende 2-syklus for alle c inni sirkelen med radius $1/4$ omkring $c = -1$, dvs. inni "bulen" til venstre for hovedkardioiden i Mandelbrotdiagrammet.