UNIVERSITETET I STAVANGER 25. AUGUST 2005

Eksamen i **BIT260 Fluidmekanikk**

Kortfattet løsningsforslag

1.

a)
Gaugetrykket $p_{\mathrm{H,gauge}}$ i flaska i nivå H over bunnen følger fra statisk trykkligning anvendt på manometeret:

$$p_H - p_{\mathrm{atm}} = -s_{\mathrm{ch}}\rho_{\mathrm{vann}}g\tilde{h} - s_{\mathrm{Hg}}\rho_{\mathrm{vann}}g(-h)$$

Det gir ca. 0.12 atm:

$$p_{\mathrm{H,gauge}} = \rho_{\mathrm{vann}}g(s_{\mathrm{Hg}}h - s_{\mathrm{ch}}\tilde{h}) = 999.1 \times 9.807 \times (13.56 \times 0.10 - 0.96 \times 0.05)\,\mathrm{Pa} \quad = \quad 12.8\,\mathrm{kPa}$$

b)
La W være tyngden av champagnen nedenfor målernivået:

$$\begin{aligned} W &= s_{\mathrm{ch}}\rho_{\mathrm{vann}}g\left(\pi r^2 H - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3\right) \\ &= \pi s_{\mathrm{ch}}\rho_{\mathrm{vann}}g r^2\left(H - \frac{2}{3}r\right) \\ &= \pi \times 0.96 \times 999.1 \times 9.807 \times (0.05)^2\left(0.16 - \frac{2}{3}0.05\right)\,\mathrm{N} \\ &= 9.36\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

c)
Netto kraft K mot flaskebunnen fås fra statisk likevekt av champagnen under målernivået:

$$\begin{aligned} K &= \pi r^2 p_{\mathrm{H,gauge}} + W \\ &= \left(\pi(0.05)^2 12.8 \times 10^3 + 9.36\right)\,\mathrm{N} \\ &= (100.53 + 9.36)\,\mathrm{N} \; = \quad 110\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

2.

a)
Vektstrømraten for brent flybensin:

$$(\rho g Q)_{\mathrm{brensel}} = R\rho_{\mathrm{luft}}gA_1V_1 = \frac{1}{25}1.226 \times 9.807 \times 0.035 \times 280\,\mathrm{N/s} \; = \quad 4.71\,\mathrm{N/s}$$

b)
Eksosens massestrømrate er summen av innstrømmende lufts og bensinens:

$$(\rho Q)_{\mathrm{ut}} = (1+R)\rho_{\mathrm{luft}}A_1V_1 = \left(1 + \frac{1}{25}\right)1.226 \times 0.035 \times 280\,\mathrm{kg/s} \; = \quad 12.5\,\mathrm{kg/s}$$

c)
F_x, definert positiv i luftstrømmens retning på figuren, balanseres av $(-F_x)$ som virker *fra* luftstrømmen *på* motoren. Motorens kraft *på* gassene i kontrollvolumet blir da $+F_x$, fremdeles definert

positiv i luftstrømmens retning. Komponenten av impulssatsen i denne retningen gir, når luftens gaugetrykk brukes i trykkbidragene:[1]

$$
\begin{aligned}
F_x &= (\rho QV)_{\mathrm{ut}} - (\rho QV)_{\mathrm{inn}} \\
&= \rho_{\mathrm{luft}} A_1 V_1 \left[(1+R)V_2 - V_1\right] \\
&= 1.226 \times 0.035 \times 280 \left[\left(1 + \frac{1}{25}\right) 550 - 280\right] \mathrm{N} \\
&= 3.5\,\mathrm{kN}
\end{aligned}
$$

3.

a)

$$
\begin{aligned}
v_r &= -\frac{\partial \phi}{\partial r} = && 0 \\
v_t &= -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = && \frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

b)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_t}{\partial \theta} = 0 + 0 + 0 = \quad 0; \text{ kontinuitet oppfylt!}$$

c)

$$\nabla \times \boldsymbol{u} = \frac{\partial v_t}{\partial r} + \frac{v_t}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r^2} + \frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r^2} + 0 = \quad 0$$

0 virvling medfører at et hastighetspotensial eksisterer (noe som var en forutsetning for at det kunne oppgis!).

d)

Siden $\boldsymbol{u}$ ikke avhenger eksplisitt av tiden, får akselerasjonen bare konvektive bidrag:

$$
\begin{aligned}
a_r &= \{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\}_r = (v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_t\frac{\partial}{\partial \theta})\,0 - \frac{1}{r}v_t^2 = -\frac{1}{r}(\frac{\gamma}{2\pi})^2\frac{1}{r^2} = && -(\frac{\gamma}{2\pi})^2\frac{1}{r^3} \\
a_t &= \{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\}_t = (0\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_t(\rightarrow 0))v_t + \frac{1}{r}0v_t = && 0
\end{aligned}
$$

Akselerasjonen har 0 tangensialkomponent, og $a_r < 0$ i alle punkter utenom origo. $\boldsymbol{a}$ peker derfor alltid mot origo.

e)

$v_r = 0$ medfører ren sirkelbevegelse: Strømlinjene blir konsentriske sirkler med sentrum i origo, der $v_t > 0$ medfører retningspiler som angir positiv dreieretning. (Tegn sjøl!)

4.

a)

Legg et kontrollvolum som omfatter alt vannet, med innløp i overflaten i det høyest liggende reservoaret og utløp i overflaten av det nederste. I energiligningen er hastighetsleddene neglisjerbare hvis overflatene er store, og differansen mellom trykkleddene blir neglisjerbar i grensen av liten nivåforskjell mellom overflatene. Siden vi skal se bort fra "små" tap, er alle $h' = 0$ i uttrykket for h_L. Energiligningen reduserer seg til, med V for strømhastigheten i røret:

$$-\Delta z = h_f = f\frac{L}{D}\frac{1}{2g}V^2$$

[1] Resultatet er en litt stusselig skyvkraft for et fly som forutsettes å bevege seg med omtrent Mach 0.85 – det måtte i så fall være et nokså lite fly. Men tallverdiene er faktisk hentet fra en læreboksoppgave.

Omform uttrykket til (med SI-enhetene undertrykt i notasjonen)

$$fV^2 \;=\; 2gD\,\frac{-\Delta z}{L} \;=\; 2\times 9.807\times 0.04\times\frac{5}{225} \;=\; 0.01743$$

eller:

$$V \;=\; \frac{0.1320}{\sqrt{f}}$$

Det er smart og arbeidsbesparende med tanke på iterasjonene å sette inn for V i definisjonen av Reynoldstall, slik at man får det andre uttrykket som det spørres etter:

$$\mathrm{Re} = \frac{DV}{\nu} = \frac{0.04\times 0.1320}{1.139\times 10^{-6}}\frac{1}{f^{1/2}} \;=\; \frac{4637}{f^{1/2}}$$

b)
Iterer Re-relasjonen ved hjelp av Moody-diagrammet. Med antagelsen om glatt rør er det ofte smart å starte med en f-verdi omtrent midt i Moody-diagrammet. Nærmere bestemt, ta tipset fra oppgaveteksten og sett $f_{\mathrm{start}} = 0.02$. Med den sedvanlige diskutable avlesningsnøyaktigheten gir det:

It. #	1	2
f_{inn}	0.02	0.023
Re	32790	30575
f_{ut}	0.023	0.023

Dvs. med tilstrekkelig nøyaktighet:

$$Q = \frac{\pi}{4}D^2V = \frac{\pi}{4}(0.04)^2\frac{0.1320}{\sqrt{0.023}} \;=\; 1.094\,\mathrm{l/s} = 3.94\,\mathrm{m^3/h}$$

c)
Legg et kontrollvolum i reservoar 1 som omfatter alt vannet der, med innløp i *overflaten* og utløp i *rørinnløpet*. Med de oppgitte antagelsene er det ingen energitap her. Høydedifferansen blir Δz, med samme verdi som før. Trykkdifferansen gir gaugetrykket i rørinnløpet siden p_1 er lik atmosfæretrykket. La p_{inn} være det etterspurte trykket i rørinnløpet. Overflatens areal antas å være så mye større enn rørtverrsnittsarealet at overflatens kinetiske energi er neglisjerbar. Energiligningen reduserer seg da til følgende uttrykk, hvor resultatet fra punkt a) brukes til å omforme det kinetiske energileddet:

$$\begin{aligned}\frac{p_{\mathrm{inn,gauge}}}{\rho g} = \frac{p_{\mathrm{inn}} - p_{\mathrm{atm}}}{\rho g} &= -(z_2 - z_1) - \frac{V^2}{2g}\\ &= -\Delta z + \frac{D}{fL}\Delta z\\ &= h_f\left(1 - \frac{D}{fL}\right)\end{aligned}$$

Og det er det oppgitte uttrykket.[2]

[2] *Interpretasjon:* Når rørinnløpet har samme nivå som overflaten i reservoar 2, må trykkenergien i innløpet (under forutsetning om energitap bare i røret) ha den størrelsen som skal tapes som varme ved strømmen gjennom røret. (Korreksjonsleddet D/fL tar hensyn til den kinetiske energien som også skal dissiperes, men i denne oppgaven blir $D/fL \ll 1$.)