HØGSKOLEN I STAVANGER 26. SEPTEMBER 2001

Eksamen i **TE 347 Fluidmekanikk**

Kortfattet løsningsforslag

1.

a)
Hvis inkompressibel fluid og konstant indre rørtverrsnitt, vil høyre Hg-søyle stige like mye som venstre faller, pga. kontinuitet. Derfor vil den nye Hg-nivådifferansen bli dobbelt så stor som fall-høyden til venstre Hg-søyle.

b)

$$p_A = p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}g\Delta h_1 - \rho_{\text{vann}}g\Delta H_1$$

c)

$$\begin{aligned} 2p_A &= p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}g\Delta h_2 - \rho_{\text{vann}}g\Delta H_2 \\ &= p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}g(\Delta h_1 + 2x) - \rho_{\text{vann}}g(\Delta H_1 + x) \end{aligned}$$

d)
Multipliser ligningen fra b) med (-2) og den fra c) med 1. Legg dem sammen; da forsvinner p_A, og tilbake står et resultat som kan løses mhp. x:

$$0 = p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}g(\Delta h_1 - 2x) - \rho_{\text{vann}}g(\Delta H_1 - x)$$

$$x = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{vann}}g(2s_{\text{Hg}} - 1)} + \frac{s_{\text{Hg}}\Delta h_1 - \Delta H_1}{2s_{\text{Hg}} - 1}$$

e)
Med innsatte tallverdier:

$$\begin{aligned} \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{vann}}g(2s_{\text{Hg}} - 1)} &= 0.3994\,\text{m} \\ \frac{s_{\text{Hg}}\Delta h_1 - \Delta H_1}{2s_{\text{Hg}} - 1} &= -0.1394\,\text{m} \end{aligned}$$

Følgelig:

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 + 2x = \qquad 0.620\,\text{m}$$

2.

Fra hydrostatikkens grunnligning, Bernoullis ligning, og kontinuitetsligningen:

$$p_1 - p_2 = s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}h_{\text{m}}$$

$$\frac{p_1}{\rho_{\text{vann}}g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho_{\text{vann}}g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_L\,, \qquad h_L = k_v\frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{\pi}{4}D^2V_1 = \frac{\pi}{4}d^2V_2$$

Kombinert:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2s_{\text{Hg}}gh_m}{(\frac{D}{d})^4(1+k_v) - 1}}\,, \qquad V_2 = (\frac{D}{d})^2V_1$$

a) For $k_v = 0$:

$$V_1 = 1.47\,\mathrm{m/s}$$
$$V_2 = 9.20\,\mathrm{m/s}$$

b) For $k_v = 0.296$:

$$V_1 = 1.29\,\mathrm{m/s}$$
$$V_2 = 8.06\,\mathrm{m/s}$$

c) Tapseffekt (husk at hastigheten funnet under b) går sammen med $k_v \neq 0$):

$$P_{\mathrm{tap}} = \rho_{\mathrm{vann}} g Q h_L = \tfrac{\pi}{8} k_v \rho_{\mathrm{vann}} d^2 V_2^3 = 97.0\,\mathrm{W}$$

3.

$\boldsymbol{F} = (F_{\parallel}, F_{\perp})$ defineres å virke på skovlbladet, slik at $-\boldsymbol{F}$ virker på vannet og altså er den størrelsen som inngår i impulssatsen. La kontrollvolumet omslutte den vannmengden som er vist i figuren i oppgaveteksten. Det er naturlig å velge gaugetrykk i regningen siden atmosfæretrykket inngår overalt, og $p_{\mathrm{atm,gauge}} = 0$, dvs. alle trykkbidrag i impulssatsen faller ut. Impulssatsen tar da formen

$$\begin{aligned}
\Sigma(\boldsymbol{F})^{\text{på vann}} &= -\boldsymbol{F} \\
&= \rho_{\mathrm{vann}} Q_2 \boldsymbol{V}_2 + \rho_{\mathrm{vann}} Q_3 \boldsymbol{V}_3 - \rho_{\mathrm{vann}} Q_1 \boldsymbol{V}_1 \\
&= \rho_{\mathrm{vann}} Q_1 \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{V}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1\right)
\end{aligned}$$

dvs.

$$\boldsymbol{F} = \rho_{\mathrm{vann}} Q_1 \boldsymbol{V}_1 = \frac{\pi}{4} \rho_{\mathrm{vann}} D^2 V_1^2\, \hat{\boldsymbol{e}}_1$$

fordi $\boldsymbol{V}_2$ og $\boldsymbol{V}_3$ er like store og motsatt rettede vektorer, og $Q_2 = Q_3 = Q_1/2$. Enhetsvektoren $\hat{\boldsymbol{e}}_1$ peker i retningen til innkommende stråle.

a) Kraft i positiv innkommende stråleretning: $F_{\parallel} = \frac{\pi}{4} \rho_{\mathrm{vann}} D^2 V_1^2 = 1.50\,\mathrm{kN}$

b) Kraft tvers på innkommende stråleretning: $F_{\perp} = 0$

4.

a)
Kontinuitetsbetingelsen

$$A_1 u_1 = A_2 u_2\,, \qquad A \propto r^2$$

gir

$$r_0^2 V_0 = r^2(x) u(x)$$

eller

$$r(x) = \sqrt{\frac{V_0}{u(x)}}\, r_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1 + \dfrac{2x}{L}}}$$

b)
For stasjonær strøm i 1D approksimasjon:

$$a(x) \;=\; u(x)\frac{d}{dx}u(x) \;=\; V_0(1+\frac{2x}{L})V_0\frac{2}{L} \;=\; \frac{2V_0^2}{L}(1+\frac{2x}{L})$$

c)
Tallverdier:

$$\begin{aligned} a(0) &= \frac{2V_0^2}{L} = & 100.0\,\mathrm{m/s^2} \\ a(L) &= 3a(0) = & 300.0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

5.

a)

$$M^0L^0T^0 \;=\; [L][LT^{-1}]^a[ML^{-3}]^b[ML^{-1}T^{-1}]^c$$

$$\begin{aligned} M:&\quad 0 = b+c \\ L:&\quad 0 = 1+a-3b-c \\ T:&\quad 0 = -a-c \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad a=b=1\,,\;\; c=-1$$

Den dimensjonsløse gruppen $\Pi_2 = \frac{\rho VD}{\mu}$ kalles som kjent Reynoldstallet, Re.

b)
Dynamisk similaritet hvis like Reynoldstall, siden det er en friksjonsdominert prosess:

$$\frac{\rho V_1 D_1}{\mu} \;=\; \frac{\rho V_2 D_2}{\mu} \quad\Rightarrow\quad \frac{V_1}{V_2} \;=\; \frac{D_2}{D_1} \;=\; \frac{7}{9} \approx 0.7778$$

c)
Sammenhengen mellom f, ρ, V, D og μ tilsvarer en ligning mellom de dimensjonsløse gruppene, $\Pi_1 = \tilde{f}(\Pi_2)$, hvor $\tilde{f}$ er en funksjon som må bestemmes eksperimentelt. Hvis to strømsituasjoner 1 og 2 er dynamisk similære ($\Pi_2(1) = \Pi_2(2)$), så har de derfor også samme verdi for Π_1 som ofte kalles Strouhaltallet, $\mathcal{S}$:

$$\frac{2\pi f_1 D_1}{V_1} \;=\; \frac{2\pi f_2 D_2}{V_2} \quad\Rightarrow\quad \frac{f_1}{f_2} \;=\; \frac{D_2}{D_1}\frac{V_1}{V_2} \;=\; (\frac{D_2}{D_1})^2 \;=\; \frac{49}{81} \approx 0.6049$$