HØGSKOLEN I STAVANGER

DATO: 28. mai 2003

AVDELING FOR TEKNISK - NATURVITENSKAPELIGE FAG

EKSAMEN I:	**TE0398 Statistisk Fysikk**
VARIGHET:	**kl. 09–13 (4 timer)**
TILLATTE HJELPEMIDLER:	Lommekalkulator K.J. Knutsen: “Formler og data i fysikk” Rottmanns formelsamling

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 3 OPPGAVER PÅ 4 SIDER

OPPGITT:

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 + \dots \qquad (x \ll 1)$$

$$Z = \sum_r e^{-\beta E_r}\,, \qquad \beta = \frac{1}{kT}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$\overline{E} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$

$$c_V = \left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial T}\right)_V$$

$$F = -kT \ln Z$$

$$N! \approx (N/e)^N \qquad (N \gg 1)$$

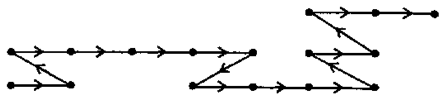
$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

Oppgave 1

I denne oppgaven ser vi på en endimensjonal modell som fanger opp noen essensielle egenskaper til materialer av typen gummi.

La et polymer bestå av en kjede av N monomerer som alle har samme lengde a. Hver monomer har 2 orienteringsmuligheter, idet den kan peke mot høyre eller mot venstre, med samme energi for begge. Vi lar N_+ og N_- betegne henholdsvis antall høyre- og venstrepekende ledd. Kjedens totale lengde kalles L. På figuren under er venstrepekende ledd tegnet i en skråvinkel for å få organiseringen tydelig fram. En makrotilstand kan beskrives som (L, N) eller for eksempel



(N_+, N). Til hver slik makrotilstand svarer det et veldefinert antall mikrotilstander – her betyr dette antall måter for eksempel N_+ høyrepekende lenker kan plasseres i kjeden av N monomerer. Vi skal anta som kjent den assosierte entropien S for tilfellet der N, N_+ og N_- alle er $\gg 1$,

$$S(L,N) = Nk\left[\ln 2 - \frac{1}{2}(1+\frac{L}{Na})\ln\left(1+\frac{L}{Na}\right) - \frac{1}{2}(1-\frac{L}{Na})\ln\left(1-\frac{L}{Na}\right)\right]$$

og dessuten anta som kjent at siden 2. hovedsetning for et elastisk system kan skrives som $dE = T\,dS + \tau\,dL$, er strekket i kjeden ("snorstrammingen") τ definert som

$$\tau = -T\left(\frac{\partial S}{\partial L}\right)_E$$

a) Sett opp et uttrykk for lengden av en polymer, og vis at antall monomerer av de to typene er gitt ved

$$N_\pm = \frac{Na \pm L}{2a}$$

Angi også den statistiske vekten for en gitt makrotilstand.

b) Utled at strekket i kjeden, τ, er gitt ved

$$\tau = \frac{kT}{2a}\ln\left(\frac{1+\dfrac{L}{Na}}{1-\dfrac{L}{Na}}\right)$$

c) Vis at i spesialtilfellet $L \ll Na$ vil uttrykket for τ forenkles til et uttrykk av samme form som Hookes lov, $\tau = \sigma L$. Kommenter kort hvordan lengden av polymeren varierer med temperaturen ved konstant strekk.

Oppgave 2

Gitt en krystall bestående av N enatomige molekyler. Vi antar at krystallen er i termisk likevekt med et vannbad ved temperaturen T. Vi bruker Einsteins modell på krystallen og antar at de enkelte molekylene svinger uavhengig av hverandre om sine likevektsposisjoner, og at disse bevegelsene er enkle harmoniske svingninger. Ved dekomposisjon av bevegelsene i x-, y- og z-retning er dermed krystallen modellert som $3N$ uavhengige oscillatorer.

Kvantemekanisk er de tillatte energinivåene for en harmonisk oscillator gitt ved

$$\epsilon = \hbar\omega\,(n + \frac{1}{2}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

der $\hbar$ er Plancks konstant og ω er oscillatorens sirkelfrekvens.

a) Bestem partisjonsfunksjonen for 1 oscillator, og vis at den kan skrives på formen

$$Z_1 = \frac{e^{-x/2}}{1 - e^{-x}}\,, \qquad x = \beta\hbar\omega$$

b) Bestem midlere energi $\overline{\epsilon}$ for en oscillator, og vis ut fra det at midlere energi $\overline{E}$ for hele krystallen kan skrives som

$$\overline{E} = \frac{3}{2}N\hbar\omega + \frac{3N\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

c) Vis at varmekapasiteten $c_V = c_V(T)$ ved konstant volum kan skrives som

$$c_V = 3Nk\frac{x^2 e^x}{(e^x - 1)^2}\,, \qquad x \equiv \beta\hbar\omega = \frac{\theta_E}{T}\,, \qquad \theta_E = \frac{\hbar\omega}{k}$$

d) Bestem c_V i lavtemperaturtilfellet $T \ll \theta_E$. Hva får man spesielt ved $T \to 0$, og hvordan stemmer dette resultatet med termodynamikkens 3. hovedsetning?

Oppgave 3

Gitt en perfekt klassisk gass. Den består av N identiske molekyler i et volum V, i termisk likevekt ved temperatur T. Anta kjent at partisjonsfunksjonen Z_1 for ett molekyl er gitt ved uttrykket

$$Z_1 = V\, f(T)\,, \qquad f(T) = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} Z^{\text{int}}$$

der faktoren Z^{int} skyldes indre frihetsgrader.

a) Skriv ned uttrykket for partisjonsfunksjonen Z_N for hele gassen, og bestem ut fra det Helmholz' fri energi F, i grensen hvor N er et makroskopisk antall slik at Stirlings formel kan brukes.

b) Bestem trykket $p = p(T, V, N)$ i gassen. Forklar kort hvorfor denne tilstandsligningen er uavhengig av de indre frihetsgradene.

c) Spesialiser så til en enatomig gass. Bestem dens entropi S. Skriv resultatet som logaritmen til et produkt av faktorer (Sackur-Tetrode-ligningen).

– God sommer –