



HØGSKOLEN  
I STAVANGER

**DET TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET**

**EKSAMEN I:** MPT110 Kaotiske dynamiske systemer **DATO:** 13. desember 2004

**TID FOR EKSAMEN:** Kl. 09-13 (4 timer)

**TILLATTE HJELPEMIDDEL:** Kalkulator  
Rottmann eller en annen valgfri standard formelsamling  
Devaneys lærebok

**OPPGAVESETTET BESTÅR AV 4 OPPGAVER PÅ 2 SIDER INKL. DENNE FORSIDEN**

**MERKNADER:** Alle spørsmålene skal besvares.  
Hver av de 4 oppgavene teller like mye.

---

**OPPGITT:**

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$$

---

**Oppgave 1**

Funksjonen  $F_{\sigma} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  er gitt ved  $F_{\sigma}(x) = -\sigma x - x^3$ , med  $\sigma \in \mathbf{R}$  en parameter. Anta kjent at det skjer en bifurkasjon ved  $\sigma = 1$ , hvor en syklus med primærperiode 2 og de to periodiske punktene  $q_{\pm} = \pm\sqrt{-\sigma + 1}$  oppstår.

- Er 2-syklusen tiltrekkende, nøytral eller frastøtende? (Begrunn svaret ved regning.)
- Tegn en kvalitativ skisse av  $F_{\sigma}(x)$  for en  $\sigma$ -verdi i området  $0 < \sigma < 1$ . Hvor mange fikspunkter er det? Hvor mange fikspunkter ville det istedet vært hvis  $\sigma < -1$ ?
- Finn Schwarz' deriverte  $SF_{\sigma}(x)$  for funksjonen.
- For tilfellet  $\sigma > 0$ : Hva er sammenhengen mellom resultatet fra punkt c) og kurveformen du fant under punkt b)?

(Vend)

## Oppgave 2

Betrakt de to avbildningene  $Q_c : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  og  $F_\lambda : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ , gitt ved  $Q_c(x) = x^2 + c$  (kvadratisk) og  $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$  (logistisk). Anta kjent at det finnes en samstilthet mellom dem med formen  $L(x) = ax + b$ , med  $a, b \in \mathbf{R}$ .

- a) Sett inn i den generelle samstilthetsrelasjonen

$$L \circ F_\lambda(x) = Q_c \circ L(x)$$

- b) Finn et ligningssystem for  $a$  og  $b$  ut fra koeffisientene for hver potens av  $z$ . Løs det.  
c) Finn deretter korrespondansen  $c = c(\lambda)$ . Hvilke  $c$ -verdier tilsvarer henholdsvis  $\lambda = 1$  og  $\lambda = 4$ ?  
d) Tegn samstilthetsdiagram.

## Oppgave 3

- a) Beregn summen av lengdene av alle intervallene som blir fjernet fra intervallet  $[0,1]$  ved konstruksjonen av Cantors midtre-*sjudels*-sett.

- b) Beregn avstanden mellom sekvensene  $s = (\overline{1101})$  og  $t = (\overline{01})$  i sekvensrommet på 2 symboler.

## Oppgave 4

Den komplekse logistiske avbildningen  $F_\lambda : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  er gitt ved  $F_\lambda(z) = \lambda z(1 - z)$ , med  $\lambda, z \in \mathbf{C}$ .

- a) Finn alle fikspunktene for  $F_\lambda$ .  
b) Finn alle verdiene av parameteren  $\lambda$  som gir et tiltrekkende fikspunkt. Angi dem på en skisse i det komplekse  $\lambda$ -planet.

Betrakt deretter avbildningens slektning  $G_\kappa : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $G_\kappa(z) = \kappa z(1 - z^2)$ ,  $\kappa \in \mathbf{C}$ .

- c) Vis at  $z$ -verdiene

$$q_\pm(\kappa) = \pm \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa}}$$

ligger på en syklus med periode 2 for  $G_\kappa$ , forutsatt  $\kappa \neq 0$  og  $\kappa \neq -1$ .<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>