HØGSKOLEN I STAVANGER

DATO: 4. desember 1998

AVDELING FOR TEKNISK - NATURVITENSKAPELIGE FAG

EKSAMEN I: TES 10 Kaotiske dynamiske systemer

VARIGHET: 4 **timer**

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator
Rottmanns formelsamling
Devaneys lærebok

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 2 SIDER

MERKNADER: Alle oppgavene skal besvares.
Hver av de 4 oppgavene teller like mye.

OPPGITT:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$$

Oppgave 1

La $F_\mu : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være gitt ved $F_\mu(x) = -\mu x - x^3$, med $\mu \in \mathbf{R}$.

a) Finn fikspunktene til F_μ. For hvilke μ-verdier er noen av dem nøytrale eller tiltrekkende? Begrunn svaret.

b) Har man, for noen verdi av μ (> 0), en periodedoblingsbifurkasjon? Finn i så fall x-verdiene som danner en 2-syklus etter bifurkasjonen.

Spesialiser i de to neste spørsmålene til $\mu = 1$.

c) Skisser $F_1(x)$.

d) Beregn $SF_1(x)$. Gjelder Schwarz' min-max-prinsipp? Kommenter resultatet i henhold til skissen fra forrige punkt.

(Vend)

Oppgave 2

a) Avgjør om settet $T_2 = \{(s_0 s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots) \mid s_2 = 0\}$ ligger tett i Σ. (*Tips:* Betrakt avstand fra en sekvens $\mathbf{s} = (s_0 s_1 1 s_3 s_4 \ldots)$.)

b) Anta $z \in \mathbf{C}$. Finn polynomet $P(z)$ som er samstilt til $F(z) = z^3$ via $H(z) = z + \frac{1}{z}$. (*Tips:* La $w = z + \frac{1}{z}$ og finn z.)

Oppgave 3

a) Figuren viser første trinn i konstruksjonen av en fraktal generert ved å erstatte et linjesegment med mindre segmenter som på figuren, hvor hvert nytt segment er $1/3$ så langt som segmentene i forrige "generasjon". (I hver iterasjon fås "tilleggene" oppover og utover.)
Tegn (omhyggelig) de to neste iterasjonene i prosessen.

b) Beregn fraktal dimensjon for den resulterende fraktalen.

c) Anta at "grunnlinjen" man starter med har lengde 1. Beregn *ved summasjon* det totale arealet av figuren som begrenses av fraktalen og grunnlinjen. (*Tips:* Arealene tangerer men overlapper ikke. Du kan sjekke resultatet av regningen mot "trekantarealet" som antydes ved iterasjonene i punkt a).)

Oppgave 4

Betrakt funksjonene $G_c : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ være gitt ved $G_c(z) = c(z^2 + \frac{1}{z^2})$, med $c, z \in \mathbf{C}$.

a) Finn de kritiske punktene til G_c.

b) Vis at banene til alle de kritiske punktene lider samme skjebne. Bør du velge noe spesielt kritisk punkt ved beregningen av analogien til Mandelbrotsettet for denne familien av funksjoner?

c) Vis at $c = \pm\frac{1}{2}$ er Misiurewicz-punkter for funksjonene, dvs. at de kritiske punktene er endeperiodiske. (*Tips:* Benytt resultatet fra b) til å spare arbeid.)[1]

---

[1]

– God jul –