HØGSKOLEN I STAVANGER 4. SEPTEMBER 2004

Eksamen i **TE0347/BIT260 Fluidmekanikk**

Kortfattet løsningsforslag

1.

a)
Hvis inkompressibel fluid og konstant indre rørtverrsnitt, vil høyre Hg-søyle stige like mye som venstre faller, pga. kontinuitet (massebevarelse). Derfor vil den nye Hg-nivådifferansen bli dobbelt så stor som fallhøyden til venstre Hg-søyle.

b)
Direkte fra hydrostatikkens grunnligning på integrert form:

$$p_A = p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}g\Delta h_1 - \rho_{\text{vann}}g\Delta H_1$$

c)
(Tilstrekkelig å bruke ord som følger:) Med det som er oppgitt under a), følger resultatet umiddelbart når man gjør de følgende samtidige substitusjonene i ligningen funnet under b) – de utgjør hele forskjellen mellom situasjonene:

$$\begin{aligned} p_A &\rightarrow 2p_A \\ \Delta h_1 &\rightarrow \Delta h_2 \\ \Delta H_1 &\rightarrow \Delta H_2 \end{aligned}$$

d)
Multipliser ligningen funnet under b) med (-2) og den oppgitt under c) med 1. Legg dem sammen; p_A forsvinner, og tilbake står et resultat som kan løses mhp. x:

$$0 = p_{\text{atm}} + s_{\text{Hg}}\rho_{\text{vann}}g(\Delta h_1 - 2x) - \rho_{\text{vann}}g(\Delta H_1 - x)$$

$$x = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{vann}}g(2s_{\text{Hg}} - 1)} + \frac{s_{\text{Hg}}\Delta h_1 - \Delta H_1}{2s_{\text{Hg}} - 1}$$

e)
Med innsatte tallverdier:

$$\begin{aligned} \frac{p_{\text{atm}}}{\rho_{\text{vann}}g(2s_{\text{Hg}} - 1)} &= 0.3970\,\text{m} \\ \frac{s_{\text{Hg}}\Delta h_1 - \Delta H_1}{2s_{\text{Hg}} - 1} &= -0.1370\,\text{m} \end{aligned}$$

Følgelig:

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 + 2x = (0.09 + 2(0.3970 - 0.1370))\,\text{m} = 0.610\,\text{m}$$

2.

a)
Hvis $\boldsymbol{F}_{\text{skovl}}$ virker på skovlen, så virker $-\boldsymbol{F}_{\text{skovl}}$ på fluiden. Med $(p_{\text{atm}})_{\text{gauge}} = 0$ og positiv akseretning i dysestrålens retning gir impulssatsen:

$$-F_{\text{skovl}} + \frac{\pi}{4}d^2(p_{\text{atm}})_{\text{g}} + \frac{\pi}{4}D^2(p_{\text{atm}})_{\text{g}} \cos 60^{\text{o}} = \rho\frac{\pi}{4}d^2 V_{\text{stråle}}\,[V_{\text{stråle}} \cos 120^{\text{o}} - V_{\text{stråle}}]$$

$$F_{\text{skovl}} = \tfrac{3}{8}\pi\rho_{vann}d^2V^2_{\text{stråle}} = \tfrac{3}{8}\pi 998(0.02)^2(25.26)^2\ \text{N} = 300\ \text{N}$$

b)
Legg et kontrollvolum inni dysa/røret med innløp på det stedet hvor gaugetrykket har den oppgitte verdien $p_{\text{rør,g}}$ og utløp i dyseåpningen, og som omslutter alt vannet mellom disse to tverrsnittene. Kontinuitetsligningen og energiligningen gir:

$$V_1 = \left(\frac{d}{D}\right)^2 V_{\text{stråle}}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_{\text{rør,g}}}{\rho_{\text{vann}}g} + z_1 = \frac{V^2_{\text{stråle}}}{2g} + \frac{(p_{\text{atm}})_{\text{g}}}{\rho_{\text{vann}}g} + z_1 + h_L$$

$$h_L = \frac{p_{\text{rør,g}}}{\rho_{\text{vann}}g} - \left(1 - (\tfrac{d}{D})^2\right)\frac{V^2_{\text{stråle}}}{2g} = \left[\frac{342800}{998\cdot 9.807} - \left(1-\left(\tfrac{1}{5}\right)^4\right)\frac{(25.26)^2}{2\cdot 9.807}\right]\ \text{m} = 2.55\ \text{m}$$

Kommentar:
Ved formuleringen av oppgaven har vi for enkelhets skyld tillatt oss å anta tapsfri strøm ved skovlen (samme hastighet inn og ut av kontrollvolumet der), men strøm med tap gjennom dysa.

3.

a)
Med dimensjon for κ og ν som angitt på side 1 i oppgaveteksten:

$$c = \tilde{C}\kappa^a\rho^b\nu^d$$

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{LT^2}{M}\right)^a \left(\frac{M}{L^3}\right)^b \left(\frac{L^2}{T}\right)^d$$

Som balansekrav for potensene av henholdsvis M, L og T får vi dermed det lineære ligningssettet

$$\begin{aligned} 0 &= -a + b \\ 1 &= a - 3b + 2d \\ -1 &= 2a - d \end{aligned}$$

b)
Løsning av ligningene gir at c ikke avhenger av ν:

$$a = b = -\frac{1}{2}\,, \qquad d = 0$$

c)

$$c = \tilde{C}\sqrt{\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\frac{7}{5}}\sqrt{\frac{101325}{1.20}}\ \text{m/s} = 344\ \text{m/s}$$

Kommentar:
κ som oppgitt på side 1 er ***isoterm*** kompressibilitet κ_T (funnet ved derivasjon av ideell gassligning for $T = $ konstant). Men i uttrykket for lydhastigheten er det ***isentropisk*** (dvs. adiabatisk) kompressibilitet κ_S som inngår. For en ideell gass er de to er relatert til hverandre ved $\kappa_S = \kappa_T/(c_p/c_v)$, og man har (fremdeles for ideell gass) $c_p/c_v \approx 7/5$ ved "værelsestemperatur" for de toatomige gassene som utgjør hovedmengden av atmosfæren. Derfor den spesielle verdien oppgitt for den dimensjonsløse konstanten; slike konstanter kan ikke finnes ved dimensjonsanalyse.

4.

a)
En strømfunksjon – som er oppgitt! – eksisterer hvis og bare hvis kontinuitetsligningen er oppfylt.

b)

$$\xi \;=\; (\nabla\times\boldsymbol{u})_z \;=\; \frac{\partial(2Br)}{\partial r} + \frac{2Br}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(0)}{\partial\theta} \;=\; 4B$$

Hastighetspotensialet ϕ eksisterer ikke, siden virvlingen er forskjellig fra null.

c)
Strømmen er stasjonær, så $\partial/\partial t$ bidrar ikke:

$$a_r \;=\; \left(v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}v_t\frac{\partial}{\partial\theta}\right)0 - \frac{1}{r}(2Br)^2 \;=\; -4B^2r$$

Altså samme rene sentripetalakselerasjon som for et roterende stivt legeme, siden baneakselerasjonen er lik null ($v_t =$ konstant for gitt r). — Strømlinjebilde: Med $v_r = 0$ overalt blir strømlinjene konsentriske sirkler med sentrum i origo. For $B > 0$ vil strømretningen (pilretningen) tilsvare positiv dreieretning. (På den positive x-aksen er $v_t > 0$.)

5.

a)
Friksjonsfaktoren for vann finnes ved å invertere uttrykket for h_L:

$$\begin{aligned} f_{\text{vann}} \;&=\; \left(\frac{h_L}{L}\right)_{\text{vann}} \Big/ \left(D\frac{V^2}{2g}\right) \\ &=\; \frac{\pi^2}{8}\left(\frac{h_L}{L}\right)_{\text{vann}}\frac{gD^5}{Q^2} \;=\; \frac{\pi^2}{8}0.0003\frac{9.807(0.6)^5}{(0.1)^2} \;=\; 0.0283 \end{aligned}$$

b)
Et hovedpoeng i oppgaven er at vannstrømmen er turbulent, mens glyserolstrømmen er laminær:

$$\text{Re}_{\text{vann}} \;=\; \frac{4}{\pi}\left(\frac{\rho Q}{D\mu}\right)_{\text{vann}} \;=\; \frac{4}{\pi}\frac{998\cdot 0.1}{0.6\cdot 1.002\cdot 10^{-3}} \;=\; 211360$$

$$\text{Re}_{\text{glyserol}} \;=\; s_{\text{glyserol}}\frac{\mu_{\text{vann}}}{\mu_{\text{glyserol}}}\text{Re}_{\text{vann}} \;=\; 1.26\frac{1.002\cdot 10^{-3}}{1.494}211360 \;=\; 178.6$$

c)
For glyserol kan uttrykket for laminær friksjonsfaktor brukes:

$$f_{\text{glyserol}} \;=\; \frac{64}{\text{Re}_{\text{glyserol}}} \;=\; \frac{64}{178.6} \;=\; 0.358$$

d)
Ved å plotte punktet gitt av de samsvarende verdiene av Re_{vann} og f_{vann} i Moody-diagrammet, finner man ved interpolasjon "på øyemål" mellom to kurver at det tilsvarer den omtrentlige verdien

$$\frac{e}{D} \approx 0.0035$$

som forøvrig tilsvarer $e \approx 2.1$ mm. (Rom her for slingringsmonn i avlest verdi.)