DATO: 17. desember 1996

EKSAMEN I: TE 515 Kaotiske dynamiske systemer

VARIGHET: 4 **timer**

TILLATTE HJELPEMIDLER: Kalkulator
Devaneys lærebok

OPPGAVESETTET BESTÅR AV 2 SIDER

MERKNADER: Alle oppgavene skal besvares.
Hver av de 4 oppgavene teller like mye.

OPPGITT: $2\cos^2 y - 1 = \cos 2y$

Oppgave 1

I denne oppgaven lar du $F_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være gitt ved $F_\lambda(x) = x + \lambda x^2 + x^3$, med $x, \lambda \in \mathbf{R}$. Aktuelle absoluttverdier av λ antas å være små nok til at kurven har bare ett krysningspunkt med x-aksen.

a) Finn fikspunktene til F_λ. Er noen av dem nøytrale eller tiltrekkende?

b) Kan du, for $\lambda \neq 0$, enkelt finne et eventuelt tiltrekningsbasseng for noe fikspunkt? Illustrer med en kvalitativ skisse.

c) Har man, for noen verdi av λ, bifurkasjoner som stemmer med vanlig definisjon av sadelnode- eller periodedoblingsbifurkasjon?

d) Finn eventuelle kritiske punkter. Er de degenererte for noen verdier av λ? Er noe fikspunkt superstabilt for noen verdi av λ?

e) Kan du, ut fra resultatene i punkt b) og d), finne ut om forutsetningene for anvendelse av Schwarz' min-max-prinsipp gjelder eller ikke?

(Vend)

Oppgave 2

a) La $M_{01} = \{\mathbf{s} \in \Sigma \mid s_0 = 0, s_1 = 1\}$ og $M_{101} = \{\mathbf{s} \in \Sigma \mid s_0 = 1, s_1 = 0, s_2 = 1\}$. Hva er minimumsavstanden mellom et punkt i M_{01} og et i M_{101}? Gi et eksempel på to sekvenser som har denne avstanden fra hverandre.

I spørsmålene b) og c) antar du kjent at $U : [0,1] \to [-1,1]$ med $U(x) = \cos(\pi x)$ er en homeomorfisme, og har definert teltavbildningen $T(x)$ som

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{hvis } x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{hvis } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Vis at man har en samstilthet mellom $T(x)$ på $[0,1]$ og $G(x) = 2x^2 - 1$ på $[-1,1]$. Tegn kommutativt diagram.

c) Hva må du kreve av teltavbildningen for å kunne slutte at $G(x)$ er kaotisk på $[-1,1]$?

Oppgave 3

a) Figuren viser første trinn i konstruksjonen av Cantors midtre-*sjudels*-sett. Skriv ned et eksplisitt uttrykk for det itererte funksjonssystemet som genererer dette settet. Gi en kort begrunnelse for uttrykket.

b) Finn settets fraktale dimensjon.

c) Beregn summen av lengdene av alle intervallene som blir fjernet fra intervallet $[0,1]$ ved konstruksjonen av Cantors midtre-sjudels-sett.

Oppgave 4

a) Vis at $c = -2$ og $c = i$ er Misiurewicz-punkter for Q_c.

I de 3 neste spørsmålene betrakter du funksjonene $F_c = c(z^2 + \frac{1}{z^2})$, med $c, z \in \mathbf{C}$.

b) Finn de kritiske punktene til F_c.

c) Vis at banene til alle disse kritiske punktene lider samme skjebne.

d) Hvilken av banene ville du velge ved beregningen av analogien til Mandelbrotsettet for denne familien av funksjoner?[1]

---

[1]

– God jul –