HØGSKOLEN I STAVANGER 13. MAI 2004

Eksamen i **TE0347/BIT260 Fluidmekanikk**

Kortfattet løsningsforslag

1.

En plan flate er et spesialtilfelle av en krum flate, så vi kan bruke den foreleste formalismen for krumme flater. I spørsmål a) og b) er det projeksjonen av den skrå flaten inn i et vertikalt plan som inngår. At det blir samme svar på a) og c), følger av at kraftresultanten står perpendikulært på den skrå flaten fordi den er summen av lokale trykkrefter som overalt står perpendikulært på flaten – og skråvinkelen på 45° medfører samme horisontal- og vertikalkomponent.

a)

$$F_h = \rho g h_c A = \rho_{\text{vann}} g b R \left(h + \tfrac{1}{2}R\right) = 998\cdot 9.807\cdot 3\cdot 2\cdot (1+1)\,\text{N} = \qquad 117.4\,\text{kN}$$

b)

$$h_p = h_c + \frac{I_c}{h_c A} = h + \tfrac{1}{2}R + \frac{1}{12}\frac{R^2}{h+\frac{1}{2}R} = \frac{h^2 + hR + \frac{1}{3}R^2}{h + \frac{1}{2}R} = \frac{1+2+\frac{1}{3}4}{1+1}\,\text{m} = \tfrac{13}{6}\,\text{m} = \qquad 2.17\,\text{m}$$

c)
Vekt av overliggende vannvolum:

$$F_v = \rho g \left[bhR + \tfrac{1}{2}bRR\right] = \rho_{\text{vann}} g b R \left(h + \tfrac{1}{2}R\right) = F_h = \qquad 117.4\,\text{kN}$$

d)
Rask metode, men smart og fullstendig:
Skråvinkelen på 45° medfører at angrepspunktet, som ligger på skrå nedenfor flatesenteret (langs den *virkelige* flaten og ikke projeksjonen), ligger like mye til venstre for flatesenteret som nedenfor det. Adopter derfor et delresultat fra b) for å finne avstanden til F_v fra den vertikale veggdelens forlengelse:

$$x_v = \tfrac{1}{2}R + \frac{I_c}{h_c A} = h_p - h = (2.17 - 1)\,\text{m} = \qquad 1.17\,\text{m}$$

Litt mer omstendelig metode:
Den vertikale komponenten av kraftresultanten går gjennom tyngdepunktet av det overliggende vannvolumet. Finn dets avstand fra veggens forlengelse ved en standard tyngdepunktsberegning:

$$x_v = \left[\rho g b h R\cdot\tfrac{1}{2}R + \rho g \tfrac{1}{2} b R^2 \cdot \tfrac{2}{3}R\right]/F_v = \frac{h + \frac{2}{3}R}{h + \frac{1}{2}R}\cdot\tfrac{1}{2}R = \frac{1+\frac{4}{3}}{1+1}\cdot 1\,\text{m} = \tfrac{7}{6}\,\text{m} = \qquad 1.17\,\text{m}$$

2.

a)
Legg inn et kontrollvolum som omfatter alt vannet, med innløp infinitesimalt under vannoverflaten i tanken og utløp i hevertens utløp. Vi antar at overflatearealet i tanken er så mye større enn rørtverrsnittsarealet at overflatens fallhastighet $V_{\text{overflate}}$ kan neglisjeres i energiligningen eller Bernoullis ligning:

$$\frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{V_{\text{overflate}}^2}{2g} + z_1 = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z_2$$

$$V = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

Dette resultatet kalles ofte *Torricellis lov*. Tallverdi:

$V = \sqrt{2 \cdot 9.807 \cdot 2}\,\mathrm{m/s} \ =$ $\qquad 6.26\,\mathrm{m/s}$

b)
La nå kontrollvolumet inneholde bare vannet inni heverten, med innløp i hevertinnløpet og utløp i hevertutløpet:

$$\frac{p_2}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z_2 = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z_2$$
$$p_2 = p_{\text{atm}}$$

Eller, som gaugetrykk:

$p_{2,\text{gauge}} = p_{\text{atm,gauge}} = p_{\text{atm}} - p_{\text{atm}} \ =$ $\qquad 0$

c)
Når $\boldsymbol{F} = (F_h, F_v)$ virker på heverten, vil $-\boldsymbol{F}$ virke på vannet i heverten og blir altså den størrelsen som inngår i impulssatsen. For horisontalkomponenten, med kontrollvolum som under punkt b):

$$\begin{aligned}
\Sigma(\boldsymbol{F}^{\text{på vann}})_x &= -F_h + p_2 A - p_{\text{atm}} A \\
&= \rho Q(\boldsymbol{V}_x^{\text{ut}} - \boldsymbol{V}_x^{\text{inn}}) \\
&= \rho A V(V - V)
\end{aligned}$$

dvs.

$F_h = (p_2 - p_{\text{atm}})A \ =$ $\qquad 0$

d)
Tilsvarende i vertikal retning, hvor vannets tyngde kommer i tillegg:

$$\begin{aligned}
\Sigma(\boldsymbol{F}^{\text{på vann}})_z &= -F_v + 0 - 0 - \rho_{\text{vann}} g \cancel{V} \\
&= \rho Q(\boldsymbol{V}_z^{\text{ut}} - \boldsymbol{V}_z^{\text{inn}}) \\
&= \rho A V(0 - 0)
\end{aligned}$$

Tallverdi, hvor fortegnet angir kraft i negatiz z-retning, dvs. nedover:

$F_v \ = \ -\rho_{\text{vann}} g \cancel{V} \ = \ -998 \times 9.807 \times 0.0471\,\mathrm{N} \ =$ $\qquad -461\,\mathrm{N}$

3.

Anta (siden ikke noe annet er sagt) at bevegelsen foregår så langt under væskeoverflaten at ingen overflatebølgeefekter opptrer, dvs. at tyngdekrefter ikke blir viktige for vannstrømmen omkring legemet sammenlignet med de viskøse kreftene. Similaritetskravet blir da like Reynoldstall.

a)
$(\mathrm{Re})_m = (\mathrm{Re})_p \qquad \Rightarrow$

$$\frac{V_m D_m}{\nu_m} = \frac{V_p D_p}{\nu_p}$$

$V_m = \dfrac{D_p}{D_m}\dfrac{\nu_m}{\nu_p} V_p = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\nu_m \rho_p}{\mu_p} V_p = \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\nu_m s_p \rho_{\text{vann}}}{\mu_p} V_p = \dfrac{1}{7}\dfrac{1.01 \cdot 10^{-6} \cdot 0.833 \cdot 998}{0.0287}\,15\,\mathrm{m/s} \ =$ $\qquad 6.27\,\mathrm{cm/s}$

b)
Bruk den grunnleggende definisjonen av Reynoldstall som forholdet mellom treghetskraft og viskøs kraft. Dragkraften representerer den viskøse kraften:

$$\frac{F_{Im}}{F_{Vm}} = \frac{F_{Ip}}{F_{Vp}}$$

$$F_{Vp} = \frac{\rho_p V_p^2 L_p^2}{\rho_m V_m^2 L_m^2} F_{Vm} = \frac{\rho_m}{\rho_p} \left(\frac{\mu_p}{\nu_m \rho_m}\right)^2 \left(\frac{(\mathrm{Re})_p}{(\mathrm{Re})_m}\right)^2 F_{Vm}$$
$$= \frac{998}{0.833 \cdot 998} \left(\frac{0.0287}{1.01 \cdot 10^{-6} \cdot 998}\right)^2 \cdot 1^2 \cdot 3.5\,\mathrm{N} = \qquad 3.41\,\mathrm{kN}$$

4.

a)
Legg kontrollvolumet som i Oppgave 2a). Anta viskøs strøm, men regn først som om det ikke er pumpe til stede. Ved innsetting i energiligningen finner man det som skulle vises:

$$\frac{p_{\mathrm{atm}}}{\rho g} + \frac{V_{\mathrm{overflate}}^2}{2g} + z_1 = \frac{p_{\mathrm{atm}}}{\rho g} + \frac{V_{\mathrm{reell}}^2}{2g} + z_2 + (k_e + k_b + f\frac{L}{D})\frac{V_{\mathrm{reell}}^2}{2g}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{V_{\mathrm{reell}}^2}{2g}\left(1 + k_e + k_b + f\frac{L}{D}\right)$$

$$V_{\mathrm{reell}} = \sqrt{\frac{2g(z_1 - z_2)}{1 + k_e + k_b + f\frac{L}{D}}} = \frac{V_{\mathrm{ideell}}}{\sqrt{1 + k_e + k_b + f\frac{L}{D}}}$$

b)
Pumpa settes inn for å oppnå at strømhastigheten øker til $V = V_{\mathrm{ideell}} = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$ i tilfellet der man har reell strøm og energitap:

$$P_P = \frac{1}{\eta}\rho g \frac{\pi}{4} D^2 \sqrt{2g(z_1 - z_2)}(k_e + k_b + f\frac{L}{D})(z_1 - z_2)$$
$$= \frac{1}{\eta}\frac{\pi}{8}\rho D^2 [2g(z_1 - z_2)]^{3/2}(k_e + k_b + f\frac{L}{D})$$
$$= \frac{1}{0.95}\frac{\pi}{8} \cdot 998 \cdot (0.05)^2 [2 \cdot 9.807 \cdot 2]^{3/2} \cdot 5.25\,\mathrm{Nm/s} = \qquad 1.33\,\mathrm{kW}$$

Kommentar:
Det er raskere å sjekke det oppgitte uttrykket for h_P enn å utlede det. (Ingen av delene krevdes slik oppgaven var formulert.) Bruk f. eks. innsetting i energiligningen under a): Adder uttrykket for h_P på venstre side, sett inn $V_{\mathrm{ideell}}^2 = 2g(z_1 - z_2)$ istedenfor V_{reell}^2 på høyre side, og finn at det stemmer!

5.

a)
Divergensen av hastigheten:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial}{\partial r}(0) + \frac{0}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r}) = 0 + 0 + 0 = \qquad 0$$

Siden divergensen er lik null, er kontinuitetsligningen for en inkompressibel ideell fluid oppfylt.

b)
Virvlingen:

$$(\nabla \times \boldsymbol{u})_z = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r}) + \frac{1}{r}(\frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r}) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(0) = \frac{\gamma}{2\pi}(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2}) - 0 = \qquad 0$$

Ihvertfall utenfor origo er hastighetsfeltet virvlingsfritt. (Origo er et singulært punkt.) Da må det eksistere et hastighetpotensial som har hastighetsvektoren til gradient (konvensjonsmessig som oftest med motsatt fortegn).

c)
Hastigheten er rent tangensiell, dvs. langs en sirkel om origo med radius r og polarvinkel θ vil det differensielle bueelementet $d\boldsymbol{L}$ være parallelt med $\boldsymbol{u}$:

$$\Gamma = \oint_L \boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{L} = \oint_L v_t\, dL = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma}{2\pi}\frac{1}{r} r\, d\theta = \frac{\gamma}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = \qquad \gamma$$

Sirkulasjonen er altså en konstant, uavhengig av radien i sirkelen.

Differansen mellom sirkulasjonene for to sirkler med forskjellig diameter skal ifølge *Stokes' teorem* være gitt ved integralet av virvlingen over flaten mellom sirklene. Når virvlingen er lik null, slik vi viste under forrige punkt, er det derfor konsistent at vi også har funnet sirkulasjonen til å være uavhengig av sirkelradien.

(Det er forøvrig singulariteten i origo som medfører denne "virvlingsfrie sirkulasjonen", men det ligger godt utenfor pensum.)