UNIVERSITETET I STAVANGER
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG NATURVITENSKAP

Løsningsforslag, BIT 390 – Energifysikk høsten 2011

Oppgavesett 8 til 20/10 2011

OPPGAVE 24:

a) Vi har definisjonen $\exp(-T_{1/2}/\tau) = 1/2$ og $\lambda = 1/\tau$, så:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = 6.43 \cdot 10^9\,\mathrm{yr}\,, \qquad \lambda = \frac{1}{\tau} = 1.55 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{yr}^{-1} \qquad {}^{238}\mathrm{U} \\ &= 1.02 \cdot 10^9\,\mathrm{yr}\,, \qquad \lambda = \frac{1}{\tau} = 9.85 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{yr}^{-1} \qquad {}^{235}\mathrm{U} \end{aligned}$$

[Det var feil halveringstid for ${}^{235}U$ i den opprinnelige versjonen av oppgaven].

b) For begge isotopene gjelder $N^i(t) = N_0^i \exp(-\lambda_i t)$. Med $t = 4.56 \cdot 10^9$ år [også her var det en trykkfeil i første versjon av oppgaven] får vi:

$$\frac{N_0^{235}}{N_0^{238}} = \frac{N^{235}(t)}{N^{238}(t)} e^{(\lambda_{235}-\lambda_{238})t} = \frac{0.72}{99.7} e^{(9.85\cdot 10^{-10}-1.55\cdot 10^{-10})\cdot 4.56\cdot 10^9} = 0.38\,.$$

Dette gir den relative andelen av de to isotopene ved solsytemets dannelse som:

$$\begin{aligned} x_0^{238} &= \frac{N_0^{238}}{N_0^{238}+N_0^{235}} = \frac{1}{1+N_0^{235}/N_0^{238}} = 0.72 = 72\,\%\,, \\ x_0^{235} &= 1 - x_0^{238} = 0.28 = 28\,\%\,. \end{aligned}$$

OPPGAVE 25:

a) Karbon har ladningstallet $Z = 6$ og isotopen ${}^{14}\mathrm{C}$ har $A = 14$, så nøytrontallet er $N = A - Z = 8$. Siden både Z og N er like tall, er $\delta = -a_5 = -33.5\,\mathrm{MeV/c^2}$ (se læreboken).

b) Fra lign. (4.1) i læreboken, med koeffisienter fra (4.2) og δ som ovenfor, finner vi (her brukes symbolet M_C for lærebokens M_N, for å kunne bruke M_N for massen til ${}^{14}\mathrm{N}$ nedenfor):

$$\begin{aligned} M_C &= M(A,Z) \\ &= Zm_p + Nm_n + \frac{1}{c^2}\left[-a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3\frac{(Z-N)^2}{A} + a_4\frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{\delta}{A^{\frac{3}{4}}}\right] = 13\,039.2\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}\,. \end{aligned}$$

c) Bindingsenergien per nukleon er:

$$B(A,Z) = \frac{Zm_p + Nm_n - M_C}{A} c^2 = 7.64\,\mathrm{MeV}\,.$$

d) Hvis vi legger til massen for $Z = 6$ elektroner, finner vi:

$$M = M_C + 6m_e = 13042.3\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}\,.$$

e)

$$\Delta = M - 14\,\mathrm{u} = 1.4\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}\,.$$

Vi ser at den semiempiriske masseformelen underestimerer massen til ${}^{14}\mathrm{C}$ signifikant.

f) Nitrogen har ladningen $z = 7$, mens A er uforandret, så $N = Z - A = 7$. Siden både Z og N er odde, er $\delta = +a_5 = 33.5\,\mathrm{MeV}$.

g) På samme måte som i b) ovenfor finner vi:

$$\begin{aligned} M_N &= M(A, Z) \\ &= Zm_p + Nm_n + \frac{1}{c^2}\left[-a_1 A + a_2 A^{\frac{2}{3}} + a_3 \frac{(Z-N)^2}{A} + a_4 \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{\delta}{A^{\frac{3}{4}}}\right] = 13\,042.3\,\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{c}^2}\,. \end{aligned}$$

h) Vi ser at

$$Q = (M_C - M_N - m_e)c^2 = -3.8\,\mathrm{MeV} < 0\,!$$

(vi kan neglisjere nøytrinoets hvilemasse). Med massene beregnet fra den semiempiriske masseformelen er prosessen altså ikke mulig: $^{14}\mathrm{C}$ er stabil. I virkeligheten er $Q = 0.156\,\mathrm{MeV}$.

i) Q er er den tilgjengelige kinetiske energien til elektron og nøytrino til sammen. Dette blir da elektronets maksimale kinetiske energi, den minimale er $T_e = 0$ når nøytrinoet tar med seg all energien.

<u>Oppgave 26</u>:

a) Siden intensiteten i strålingen faller med kvadratet av avstanden, er solkonstanten ved Pluto:

$$S_P = \left(\frac{a_J}{a_P}\right)^2 S = \frac{S}{31.9^2} = 1.34\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\,,$$

hvor a_J er avstanden fra Solen til Pluto og $a_J = 1\,\mathrm{au}$.

b)

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T_{\frac{1}{2}}}{\ln 2} = 126.5, \text{år}\,, \\ \lambda &= \frac{1}{\tau} = 0.0791\,\text{år}^{-1} = 2.51 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{s}^{-1}\,. \end{aligned}$$

c) Av lign. (4.15a) i forelesningsnotatene for 12.10 2010 har vi, med $\mu = A\,\mathrm{kg/kmol} = 238\,\mathrm{kg/kmol}$:

$$\dot{Q} = \lambda Q N = \frac{Q m N_A}{\tau \mu} = 568\,\mathrm{W}.$$

Den elektriske effekten blir da $P_e = \eta \dot{Q} = 39.8\,\mathrm{W}$.