UNIVERSITETET I STAVANGER

Institutt for matematikk og naturvitenskap

Løsningsforslag, BIT 390 – Energifysikk høsten 2011

Oppgavesett 7 til 13.10 2011

Oppgave 22:

a) Av dispersjonsrelasjonen $\omega = \sqrt{gk}$, der $k = 2\pi/L$, har vi henholdsvis fase- og gruppehastigheten som:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}\,, \qquad v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{v_f}{2}\,.$$

Dette gir energifluksen (per lengdeenhet langs bølgefronten) som (se lign. 3.53 i læreboken):

$$\Phi_E = Uv_g = \frac{1}{4}\rho g a^2 \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} = 1.00 \cdot 10^7\,\mathrm{W/m} = 1\,000\,\mathrm{kW/m}\,.$$

b) Effekt på et ben:

$$P = \Phi_E d = 10.0\,\mathrm{MW}\,(!)$$

c) Volumforskjellen for et ben kan med tilstrekkelig nøyaktighet beregnes av formelen for volumet av en sylinder med høyde $2a$ siden $d \ll L$. Arkimedes' lov gir da:

$$\Delta F = \rho g \Delta V = \rho g\, 2a\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\rho g a d^2 = 2.4 \cdot 10^7\,\mathrm{N} = 24\,\mathrm{MN}\,.$$

[Eller folkelig: 2 400 tonn. 1 tonn (kraft) = 1 000 kgf = 9 807 N.]

Oppgave 23:

a) Volumet under vann er $V = Ah$, så Arkimedes' lov gir:

$$mg = \rho V g = g\rho h A\,,$$

og den oppgitte formelen følger.

b) Hvis bøyen forskyves et stykke y (regnet positiv oppover), vil kun et stykke $h - y$ være under vann, og gi oppdrift. Newtons 2. lov gir da, ved bruk av resultatet i forrige punkt:

$$m\ddot{y} = g\rho A(h-y) - mg = g\rho A(h-y) - g\rho h A = -g\rho A y$$

Divisjon med $m = \rho h A$ gir den oppgitte ligningen. Dette er en annen ordens differensialligning med konstant koeffisient, som kan løses på standard vis, eller den oppgitte løsningen kan verifiseres ved innsetting. Vi finner egenfrekvensen:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{h}}\,.$$

c) Med et stykke $h + z - y$ under vann, finner vi på tilsvarende måte som i b):

$$m\ddot{y} = g\rho A(h+z-y) - mg + F_g = g\rho A(z-y) + F_g \qquad \Longrightarrow \qquad \ddot{y} + \frac{g}{h}y = \frac{g}{h}z + \frac{F_g}{m}\,,$$

som ved innsetting av uttrykket for ω_0 er den oppgitte ligningen,

d) Ved innsetting av oppgitte uttrykk i ligningen i forrige punkt, får vi:

$$\ddot{y} + \frac{g}{h}y = \frac{g}{h}z_0\cos(\omega t) - \frac{gK}{h}\dot{y} - \frac{F_g}{m}\dot{y}\,.$$

En enkel omordning gir den oppgitte ligningen. Ved innsetting, og en del kjedelig regning, finner vi at den oppgitte $y(t)$ løser ligningen. [Vi kan skrive løsningen som $y(t) = y_G(t) + y_P(t)$, der $y_G(t)$ inneholder leddene med D og E, og er den generelle løsningen av den homogene ligningen, dvs. ligningen med $z_0 = 0$, mens $y_P(t)$ inneholder leddene med B og C, og er en partikulær løsning av den inhomogene ligningen.]

e) Når kraften F_i virker på et system så det beveger seg et stykke dy i kraftens retning, blir arbeidet kraften utfører $\mathrm{d}W_i = F_i\mathrm{d}y$. Vi får da effekten som $P_i = \mathrm{d}W_i/\mathrm{d}t = F_i\dot{y}$ som oppgitt. Dette gir $(\omega_0^2 = g/h)$:

$$\begin{aligned}P_i(t) = F_i\dot{y} &= m\frac{g}{h}z_0\cos(\omega t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)\right)\\ &= m\omega_0^2\omega z_0\left[-B\sin(\omega t)\cos(\omega t) + C\cos(\omega t)^2\right]\,.\end{aligned}$$

Middelverdien av dette over en periode $T = 2\pi/\omega$ blir:

$$\begin{aligned}\bar{P}_i &= \frac{1}{T}\int_0^T P_i(t) = \frac{m\omega_0^2\omega z_0}{T}\int_0^T\left[-B\sin(\omega t)\cos(\omega t) + C\cos^2(\omega t)\right]\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{m\omega_0^2\omega^2 z_0}{2\pi}\left[0 + \frac{C\pi}{\omega}\right] = \frac{1}{2}m\omega_0^2\omega z_0 C\,.\end{aligned}$$

som oppgitt. Vi har maksimum for $\bar{P}_i$ som funksjon av ω når:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{P}_i}{\mathrm{d}\omega} &= \frac{1}{2}m\omega_0^2 z_0\frac{\mathrm{d}(\omega C)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{2}mk\omega_0^4 z_0^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{\omega^2}{\omega^4 + (k^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4}\right)\\ &= mk\omega_0^4 z_0^2\frac{\omega(\omega_0^4 - \omega^4)}{\left(\omega^4 + (k^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4\right)^2} = 0\,,\end{aligned}$$

som gir at $\bar{P}_i$ har maksimum når $\omega = \omega_0$ (resonansbetingelsen).

f) Denne delen kan gjøres på flere måter. Det eleganteste er kanskje å bemerke at vi kan skrive ligningen i d) som:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{1}{m}\left(F_i - F_R\right)\,.$$

Hvis vi multipliserer denne ligningen med $\dot{y}$, og midler over en periode, ser vi at middelverdien av venstre side av ligningen kan skrives:

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left(\dot{y}\ddot{y} + \omega_0^2\dot{y}y\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_0^T\left(\frac{\mathrm{d}\dot{y}^2}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\left[\dot{y}(t)^2 + \omega_0^2 y(t)^2\right]_0^T = 0\,,$$

Den siste likheten følger, siden $y(t)$ og $\dot{y}(t)$ er periodiske funksjoner med periode T, så $y(T) = y(0)$ og $\dot{y}(T) = \dot{y}(0)$. Vi får altså:

$$0 = \frac{1}{m}(\overline{F_i\dot{y}} - \overline{F_R\dot{y}}) = \frac{1}{m}(\bar{P}_i - \bar{P}_R)\,,$$

så $\bar{P}_i = \bar{P}_R$. [Man kommer selvsagt også frem med litt tålmodighet ved å sette inn løsningen for $y(t)$ i uttrykkene for effekten, og regne ut middelverdiene.]

g) Vi har:

$$P_g = R_g\dot{y}^2 = R_g\omega^2\left[B\sin(\omega t) + C\cos(\omega t)\right]^2\,.$$

Ved resonans, $\omega = \omega_0$. har vi $B = 0$ og $C = \omega_0 z_0/k = m\omega_0 z_0/R$. Da blir:

$$\bar{P}_g = R_g\omega_0^2\left(\frac{\omega_0 z_0}{k}\right)^2\overline{\cos^2(\omega_0 t)} = \frac{R_g}{2}\left(\frac{m\omega_0^2 z_0}{R}\right)^2\,.$$

En tilsvarende formel, med R_u for R_g, gjelder for den utstrålte effekten $\bar{P}_u$. Vi har maksimal nytteeffekt når:

$$\frac{\mathrm{d}P_g}{\mathrm{d}r_g} = \frac{1}{2}\left(m\omega_0^2 z_0\right)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R_g}\left(\frac{R_g}{R_g + R_u}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m\omega_0^2 z_0\right)^2 \frac{R_u - R_g}{(R_g + R_v)^3} = 0\,,$$

dvs. for $R_g = R_v$., eller $\bar{P}_g = \bar{P}_g$. Siden $\bar{P}_i = \bar{P}_g + \bar{P}_u$, kan bøyen altså i beste fall ta ut halve bølgeenergien, maksimal virkningsgrad er $\eta = \bar{P}_g/\bar{P}_i = 0.5$.

h) Vi finner $\omega_0 = \sqrt{g/h} = 0.78\,\mathrm{Hz}$. Med $R_g = R_u$, blir $R = 2R_g$, og:

$$\bar{P}_g = \frac{1}{8R_g}\left(\frac{mgz_0}{h}\right)^2 = 1.2 \cdot 10^6\,\mathrm{W} = 1.2\,\mathrm{MW}\,.$$

Med en energifluks $\Phi_E = 40\,\mathrm{kW/m}$, er dette all energien som kommer inn på en kystlinje med lengde $d = \bar{P}_i/\Phi_E = 30\,\mathrm{m}$. Imidlertid har vi sett at virkningsgraden bare er $\eta = 0.5$, så et riktigere bilde er at bøyen kan utnytte halvparten av energien som kommer inn på en lengde på $60\,\mathrm{m}$.