UNIVERSITETET I STAVANGER
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG NATURVITENSKAP

BIT 390 – Energifysikk
Regneøvelser høsten 2011.

Oppgavesett 7 til 13.10 2010

OPPGAVE 22:

En hundreårsbølge i Nordsjøen har en bølgehøyde på $2a = 30\,\mathrm{m}$, der a er amplituden. Anta at energien er samlet rundt en bølgelengde på $L = 200\,\mathrm{m}$ og at det er dypt nok til at bølgen kan regnes som en dypvannsbølge, med dispersjonsrelasjon $\omega = \sqrt{gk}$, der k er bølgetallet. Tettheten til sjøvann er $\rho = 1\,025\,\mathrm{kg/m^3}$.

a) Hva blir energifluksen i bølgen i W/m? Vi minner om at energien per flateenhet i en overflatebølge med amplitude a er $U = \frac{1}{2}\rho g a^2$.

b) Hva blir bølgeeffekten mot et sylindrisk plattformben med diameter $d = 10\,\mathrm{m}$?

c) Hva blir forskjellen i oppdrift i plattformbenet, mellom bølgetopp og bølgedal?

OPPGAVE 23:

Vi skal se litt på en forenklet modell av en bøye som absorberer energi fra havbølger. Vi antar at en sylindrisk bøye flyter i sjøen og bare kan bevege seg vertikalt. Den har massen m og tverrsnittsareal A, og i likevekt har den delen av bøyen som er under vann høyden h. Tettheten til sjøvann er $\rho = 1\,025\,\mathrm{kg/m^3}$.

Vi ser først på tilfellet der bøyen flyter i ro.

a) Vis at likevektsbetingelsen er:

$$m = \rho h A\,.$$

[Hint: Husk Arkimedes' lov.]

b) Bøyen forskyves et stykke y ut av likevektsstillingen. Vis at bevegelsesligningen kan skrives

$$\ddot{y} + \frac{g}{h} y = 0$$

Vis at denne ligningen har løsninger på formen:

$$y(t) = B\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

der B og ϕ_0 er integrasjonskonstanter og egenfrekvensen ω_0 skal uttrykkes ved kjente størrelser.

Vi skal så undersøke hva som skjer når det er bølger på vannoverflaten. Fortsatt er y bøyens vertikale posisjon i forhold til likevektspunktet for stille vann. Bøyen er fast forbundet med en generator på havbunnen med en vertikal stang som overfører en kraft F_g. Generatoren er innrettet slik at denne kraften er proporsjonal med *hastigheten* som bøyen (og stangen) beveger seg med, $F_g = -R_g\dot{y}$, der $R_g > 0$ (minustegn fordi kraften hindrer bøyens bevegelser!).

c) La $z(t)$ være forandringen i vannhøyden ved bøyen (i forhold til stille vann) som skyldes bølgen. Vis at bevegelsesligningen for bøyen nå blir:

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_g}{m} + \frac{g}{h} z \,.$$

[Hint: Den delen av bøyen som er under vann til enhver tid har høyden $h + z - y$.]

Det kunne nå være fristende å forsøke å løse ligningen i forrige punkt ved å anta at $z(t) = z_i(t)$, der $z_i(t)$ er en innkommende bølge:

$$z_i(t) = z_0 \cos(\omega t) \,,$$

Dette er imidlertid ikke helt riktig. Dersom bøyen dupper opp og ned, selv i stille vann, vil de viskøse kreftene mellom bøyen og vannet generere bølger som sprer seg utover. Det kan vises at for små utslag har disse en amplitude proporsjonal med hastigheten til bøyen, $z_u = -K\dot{y}$. Den momentane vannhøyden ved bøyen blir altså:

$$z(t) = z_i + z_u = z_0 \cos(\omega t) - K\dot{y} \,,$$

d) Vis at med de antagelsene som er gjort kan bevegelsesligningen for bøyen skrives:

$$\ddot{y} + k\dot{y} + \frac{g}{h} y = \frac{g z_0}{h} \cos(\omega t) \,,$$

der $k = R/m$, med $R = R_g + R_u$ der $R_u = mgK/h$. Vis, for eksempel ved innsetting, at denne ligningen har løsningen

$$y(t) = De^{-\sigma_+ t} + Ee^{-\sigma_- t} + B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t) \,,$$

der D og E er vilkårlige integrasjonskonstanter, mens

$$B = \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2) z_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2\omega^2} \,, \quad C = \frac{k\omega_0^2 \omega z_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + k^2\omega^2} \,, \quad \sigma_\pm = \frac{k}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 4\omega_0^2} \,.$$

Leddene som inneholder D og E beskriver den viskøse dempningen av bøyens bevegelser, som er til stede selv om det ikke finnes bølger ($z_0 = 0$). Hvis de innkommende bølgene har vart lenge (t stor) vil disse leddene ha dødd hen, og vi skal se bort fra dem i det følgende (dvs. anta at $D = E = 0$).

e) Av bevegelsesligningen i c) ser vi at bølgen påvirker bøyen med en kraft $F_i(t) = m\frac{g}{h} z_i(t)$. Forklar hvorfor dette gir en tilført effekt $P_i = F_i \dot{y}$, og vis at middelverdien av denne er:

$$\bar{P}_i = \frac{1}{2} m\omega_0^2 \omega z_0 C \,,$$

For hvilken verdi av ω har P_i sitt maksimum? Dette kalles resonans. Et viktig poeng ved bøyekonseptet til Budal og Falnes, og andre, er å kunne regulere den effektive verdien av h og dermed ω_0, for å holde systemet nær resonans ved varierende ω.

f) Kraften $F_R(t) = -R\dot{y}(t)$ virker mot bevegelsen, og absorberer effekten $P_R = R\,\dot{y}(t)^2$. Vis at for middelverdien $\bar{P}_R$ gjelder $\bar{P}_R = \bar{P}_i$ (dvs. vi har energibevaring).

g) Den absorberte effekten kan skrives som $P_R = P_g + P_u$, der $P_u = R_u\,\dot{y}(t)^2$ er effekten strålt ut igjen av bøyen med de utgående bølgene, mens $P_g = R_g\,\dot{y}(t)^2$ er den utnyttbare effekten levert til generatoren. Finn P_g, og vis at ved resonans gjelder:

$$\bar{P}_g = \frac{R_g}{2}\left(\frac{m\omega_0^2 z_0}{R}\right)^2 .$$

For hvilken verdi av R_g er $\bar{P}_g$ maksimal, og hvor stor er virkningsgraden for bøyen der (dvs. hvor stor del av den innkommende bølgeeffekten utnytter bøyen maksimalt).

h) Typiske verdier for planlagte bøyer var $h = 16\,\mathrm{m}$, $m = 1\,600$ tonn og $R_g = 1.0 \cdot 10^5\,\mathrm{kg/s}$. Finn $\bar{P}_g$ for en bølge med amplitude $z_0 = 1\,\mathrm{m}$ og periode $T = 10\,\mathrm{s}$. Sammenlign med energifluksen i slike bølger, $\Phi_E = 40\,\mathrm{kW/m}$.

[Denne oppgaven er i største laget som eksamensoppgave.]