UNIVERSITETET I STAVANGER

INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG NATURVITENSKA P

Løsningsforslag, BIT 390 – Energifysikk høsten 2011

Oppgavesett 6 til 06.10 2011

OPPGAVE 19:

a) Dette punktet kan besvares på forskjellig vis, avhengig av hvor nøyaktig vi vil regne.

i) Grovregning: Vannvolumet innenfor reguleringshøyden er $V = Ah_r$. Hvis vi antar at hele dette volumet befinner seg i høyden h (fallhøyden) over kraftverket, får vi samlet lagret energi som (husk på at vi alltid skal regne fallhøyden fra overflaten av reservoaret):

$$E_t = \rho V g h = \rho g A h_r h = 7.06 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J} = 1.96 \cdot 10^8\,\mathrm{kWh} = 196\,\mathrm{GWh}\,.$$

[Vi regner med tre desimaler for å kunne sammenligne med mer nøyaktige beregningsmåter.]

ii) Nøyaktigere: Når vi tapper ut magasinet, faller fallhøyden fra h til $h - h_r$. Det er derfor nøyaktigere å regne med *middelverdien* til fallhøyden, $\bar{h} = h - \frac{1}{2}h_r$:

$$E_t = \rho V g \bar{h} = \rho g A h_r \bar{h} = 6.97 \cdot 10^{14}\,\mathrm{J} = 1.94 \cdot 10^8\,\mathrm{kWh} = 194\,\mathrm{GWh}\,.$$

Vi ser at forbedringen i nøyaktighet utgjør ca 1 %.

iii) Ambisiøst: Volumet av vannet mellom høydene h og $h + \mathrm{d}h$ er $\mathrm{d}V = \rho A\,\mathrm{d}h$. (Vi antar at reservoaret har loddrette sider!). Samlet energi blir da:

$$E_t = \int_{h-h_r}^{h} \rho g h\,\mathrm{d}V = \rho g A \int_{h-h_r}^{h} h\,\mathrm{d}h = \rho g A(h h_r - \tfrac{1}{2}h_r^2) = \rho V g A h_r \bar{h}\,,$$

som er samme svar som ovenfor. Vi ser at i dette tilfelle oppnår vi ikke noe ved å være pinlig nøyaktige.

b) Når volumstrømmen er $\dot{V}$, blir effekten tappet fra magasinet:

$$P_t = \rho g \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Vh) = \rho g h \dot{V} + \rho g V \dot{h}\,.$$

Det siste leddet bidrar bare hvis nivået i magasinet endrer seg. Det er negativt dersom nivået synker. Hvis vi antar at magasinet etterfylles i takt med uttappingen ($\dot{h} = 0$), får vi med $\dot{V} = 6$ $\mathrm{m^3/s}$ maksimal elektrisk effekt som:

$$P_e = \eta P_t = \eta \rho g h \dot{V} = 3.0 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 30\,\mathrm{MW}\,.$$

[Hvis vi regner på et tørrår, så reservoaret ikke etterfylles i det hele tatt, så har vi $\dot{V} = -A\dot{h}$, dvs. $\dot{h} = -\dot{V}/A = -2.5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m/s} = -7.5\,\mathrm{cm/døgn}$, og vi får maksimal effekt når magasinet er fullt ($V = h_r A$) som:

$$P_e = \eta P_t = \eta \rho g(h\dot{V} + A h_r \dot{h}) = \eta P_t = \eta \rho g(h\dot{V} + A h_r \dot{h}) == \eta \rho g \dot{V}(h - h_r) = 2.9 \cdot 10^7\,\mathrm{W} = 29\,\mathrm{MW}\,.$$

Feilen vi gjør ved å neglisjere $\dot{h}$ er altså liten i alle fall.]

c) Det er nøyaktig nok å holde seg til de groveste overslagene i a) og b). Disse gir (vi må bruke P_t, og ikke P_e, her!):

$$t = \frac{E_t}{P_t} = \frac{\eta E_t}{P_e} = 2.0 \cdot 10^7\,\mathrm{s} = 233\,\mathrm{dager}\,.$$

Oppgave 20:

a) Den maksimale effekten fra en ideell vindmølle er gitt av lign. (3.25) i læreboken:

$$P_m = \frac{16}{27}P_0 = \frac{8}{27}\rho A v_1^3 = \frac{8\pi}{27}\rho R^2 v_1^3 = 114\,\mathrm{kW}\,.$$

b) Av lign. (3.26):

$$F_m = \frac{4}{9}\rho A v_1^2 = \frac{4\pi}{9}\rho R^2 v_1^2 = 17.2\,\mathrm{kN}\,.$$

[De små avvikene fra tallene i avsnitt 3.3.1 skyldes at boken regner luftens tetthet som $\rho = 1.25\,\mathrm{kg/m^3}$, tilsvarende en lufttemperatur på $9\,^\circ\mathrm{C}$ ved standard atmosfæretrykk, mens i oppgaven er det oppgitt $\rho = 1.23\,\mathrm{kg/m^3}$, som tilsvarer $T = 14\,^\circ\mathrm{C}$.]

c) Hvis vi gjentar beregningene i a) og b) med $v_1 = 28.5\,\mathrm{m/s}$, finner vi:

$$P_m = \frac{8\pi}{27}\rho R^2 v_1^3 = 2.65\,\mathrm{MW}\,,$$
$$F_m = \frac{4\pi}{9}\rho R^2 v_1^2 = 139\,\mathrm{kN}\,.$$

Effekten er altså mer enn tyvedoblet, mens kraften på møllen er åttedoblet.

d) Av formlene ovenfor med $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ [dette burde ha vært $\rho = 1\,025\,\mathrm{kg/m^3}$], finner vi:

$$P_m = \frac{8\pi}{27}\rho R^2 v_1^3 = 2.51\,\mathrm{MW}\,,$$
$$F_m = \frac{4\pi}{9}\rho R^2 v_1^2 = 1.26\,\mathrm{MN}\,.$$

Effekten er altså omtrent den samme som for vindmøllen i sterk storm, men belastningen er ni ganger større.

Oppgave 21:

a) Den mest sannsynlige hastigheten, $\tilde{v}$ er den hastigheten der sannsynlighetsfordelingen $P(v)$ har sitt maksimum, dvs:

$$\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}v}\right|_{v=\tilde{v}} = \frac{2}{v_0^4}(v_0^2 - 2\tilde{v}^2)\,e^{-\left(\frac{\tilde{v}}{v_0}\right)^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{v} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,v_0 \approx 0.707\,v_0\,.$$

b) Medianhastigheten, v_m, er den hastigheten som ikke overstiges halvparten av tiden, dvs:

$$Q(v \le v_m) = \int_0^{v_m} P(v)\,\mathrm{d}v = \frac{2}{v_0^2}\int_0^{v_m} v e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}\mathrm{d}v = 1 - e^{-\left(\frac{v_m}{v_0}\right)^2} = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \qquad v_m = \sqrt{\ln 2}v_0 \approx 0.833\,v_0\,.$$

c) Middelhastigheten blir:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} vP(v)\,\mathrm{d}v = \frac{2}{v_0^2}\int_0^{\infty} v^2 e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}\mathrm{d}v = \frac{\sqrt{\pi}}{2}v_0 \approx 0.886\,v_0\,.$$

d) Middelverdien til den maksimale effekten blir:

$$\bar{P} = \frac{8}{27}\rho A\int_0^{\infty} v^3 P(v)\,\mathrm{d}v = \frac{16}{27v_0^2}\rho A\int_0^{\infty} v^4 e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2}\mathrm{d}v = \frac{2\sqrt{\pi}}{9}\rho A v_0^3\,.$$

Den momentane vindhastigheten, v som gir denne effekten, finner vi da som:

$$\bar{P} = \frac{2\sqrt{\pi}}{9}\rho A v_0^3 = \frac{8}{27}\rho A v^3 \qquad \Longrightarrow \qquad v = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\right)^{\frac{1}{3}} v_0 \approx 1.10\,v_0\,.$$