UNIVERSITETET I STAVANGER
INSTITUTT FOR MATEMATIKK OG NATURVITENSKA P

Løsningsforslag, BIT 390 – Energifysikk høsten 2011

Oppgavesett 5 til 29.09 2011

OPPGAVE 17:

Varmeledningsligningen, lign. (3.6) i læreboken, som vi har bruk for i denne og neste oppgave, lyder for varmestrøm i z-retningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,.$$

Her er λ varmeledningsevnen, ρ tettheten og c spesifikk varmekapasitet. Kombinasjonen $D = \lambda/\rho c$ kalles også varmens *diffusjonskonstant*, fordi varmeledningsligningen og diffusjonsligningen matematisk sett er samme ligning.

a) Sees lett ved innsetting.

b) Vann koker ved $T = T_k = 100\,°\mathrm{C}$ $(= 373\,\mathrm{K})$. Denne temperaturen oppnås ved dybden z_k:

$$T_k = T(z_k) = T_0 + Gz_k \qquad\Longrightarrow\qquad z_k = \frac{T_k - T_0}{G} = 2.0\,\mathrm{km}\,.$$

c) Hvis vi skal benytte flytende vann, må $T < T_c$, så det største dypet vi kan ha er gitt av:

$$T_c = T(z_k) = T_0 + Gz_c \qquad\Longrightarrow\qquad z_c = \frac{T_c - T_0}{G} = 8.85\,\mathrm{km}\,.$$

[For at vannet skal nå denne temperaturen, må trykket være $p_c = 22.1\,\mathrm{MPa}$ (218 atmosfærer).]

d) Det tilgjengelige varmeinnholdet for $T > T_0$ i et volum $\mathrm{d}V = A\mathrm{d}z$ (masse $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$) med konstant varmekapasitet c er $\mathrm{d}Q = c\rho\,(T - T_0)\,\mathrm{d}V$. Dette gir den tilgjengelige varmen per flate for $T > T_0$ som:

$$q = \frac{1}{A}\int_0^z \mathrm{d}Q = \rho c\int_0^z (T - T_0)\,\mathrm{d}z = \rho c G\int_0^z z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\rho c G z^2\,,$$

som oppgitt. Energien ned til dypet z_m er da:

$$q_m = \frac{1}{2}\rho c G z_m^2 = 2.2\cdot 10^{12}\mathrm{J/m^2} = 6.1\cdot 10^{11}\,\mathrm{kWh/km^2} = 610\,\mathrm{TWh/km^2}\,.$$

e) Dypet der vi kan begynne å utvinne varme er nå:

$$z_1 = \frac{T_1 - T_0}{G} = z_k = 2.0\,\mathrm{km}\,.$$

Varmeinnholdet i fjellet som ligger dypere enn dette finner vi på samme måte som i punkt d) ovenfor $(z = z_m)$:

$$q_1 = \frac{1}{A}\int_{z_1}^{z_m} \mathrm{d}Q = \frac{1}{2}\rho c G(z_m^2 - z_1^2) = 2.0\cdot 10^{12}\mathrm{J/m^2} = 5.6\cdot 10^{11}\,\mathrm{kWh/km^2} = 560\,\mathrm{TWh/km^2}\,.$$

[Et kraftverk med effekt 1 GW vil tappe varmen fra et areal på 1 km^2 i løpet av 64 år.]

[Vi kan også regne ut hvor lang tid, t, det tar for at jordvarmen skal erstatte denne varmemengden. Vi antar at dybden z er liten nok i forhold til jordskorpens tykkelse til at varmestrømmen ikke påvirkes nevneverdig av kraftverket. Varmefluksen er da gitt ved lign. (3.2) i læreboken, og vi har:

$$\Gamma = \dot{q} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \lambda G$$

Fortegnet i ligningen er snudd i forhold til boken fordi vi regner z positiv nedover, dvs. i retningen av økende temperatur. Hvis λ og G er konstante, gir dette:

$$q_1 = \lambda G t \qquad\Longrightarrow\qquad t = \frac{q_1}{\lambda G} = 2.0\cdot 10^{13}\,\mathrm{s} = 640\,000\,\text{år}\,.$$

Det er derfor neppe formålstjenlig å la kraftverket bli stående etter at varmen er tappet i påvente av at den skal etterfylles. Dette kan knappest kalles fornybar energi sett fra et menneskelig synspunkt.]

Oppgave 18:

a) Vi ser at vi må ha $B = 0$ i løsningen, siden temperaturen vokser lineært med dybden, ikke eksponentielt. For $z = 0$ har vi randbetingelsen:

$$T(t,0) = T_0 + A\cos(\omega t + \phi_1) = T_0 + \Delta T \cos \Omega t\,.$$

Dette betyr at vi må ha $A = \Delta T$, $\phi_1 = 0$ og $\omega = \Omega$. Temperaturen i bakken er altså gitt av:

$$T(t,z) = T_0 + \Delta T e^{-kz} \cos(\Omega t - kz)\,,$$

der $k = \sqrt{\frac{\Omega \rho c}{2\lambda}}$.

b) Temperatursvingningene på dypet z er i motfase med svingningene på overflaten når $\cos(\Omega t - kz) = -\cos(\Omega t)$, dvs. når $kz = \pi$ (eller $kz = 3\pi, 5\pi, \ldots$). Dette gir den minste dybden der vi har motfase som:

$$z = \frac{\pi}{k} = \pi\sqrt{\frac{2\lambda}{\Omega \rho c}} = \sqrt{\frac{\pi \lambda t_0}{\rho c}}\,.$$

Ved innsetting av tallverdier blir dybdene: 10.5 m (granitt); 4.8 m (sand), 6.4 m (jord) og 3.5 m (vann). På disse dypene er det altså kaldest om sommeren. Denne forsinkelsen betyr at det kan være kaldest i dype kjellere opptil flere måneder etter at utetemperaturen er på det laveste. Vi sier at «kulden slår inn».

c) Temperaturamplituden på dypet z funnet i forrige punkt (dvs. når $kz = \pi$) blir:

$$\Delta T(z) = \Delta T e^{-kz} = e^{-\pi}\Delta T = 0.86\,\mathrm{K}\,.$$

Vi ser at svaret er uavhengig av hva slags materiale vi har i bakken. Denne sterke dempningen av temperatursvingningene viser hvorfor (uoppvarmede) dype kjellere holder praktisk talt samme temperatur året rundt. Det viser også hvorfor det er fordelaktig å benytte jord eller fjell som kaldt reservoar for en varmepumpe om vinteren.

[Vi kan gjøre den samme analysen for temperaturvariasjonene i løpet av et døgn. Da er ΔT temperaturforskjellen mellom natt og dag, og $t_0 = 1\,\text{døgn} = 86\,400\,\mathrm{s}$. Dybden der temperaturen er i motfase med bakketemperaturen blir da redusert med en faktor $\sqrt{1\,\text{døgn}/1\,\text{år}} = \sqrt{1/365} = 0.052$, som gir dybdene: 0.55 m (granitt), 0.25 m (sand), 0.33 m (jord) og 0.18 m (vann). På disse dybden er temperaturvariasjonene dempet ut med samme faktor, $\exp(-\pi) = 0.043$, som funnet i c) ovenfor.]

Ekamensppgave 1, 2010H.

Se eget løsningsforslag for eksamen 2010H.