

Løsningsforslag, BIT 390 – Energifysikk høsten 2011

Oppgavesett 4 til 22/9 2011

OPPGAVE 14:

- a) Med lærebokens definisjon av timevinkel har vi at $\omega = 0$ når klokken er 12:00 (midlere soltid) ($t = 0$ når solen står rett S). Kl 18:00, $t = 6$ timer senere, blir $\omega = \Omega t = 90^\circ = \pi/2$ (solen står rett V). Av lærebokens lign. (2.8) med deklinasjonen $\delta = 0$ følger da:

$$\begin{aligned}\cos \theta_z &= \cos \phi \cos \omega = \cos(35^\circ) = 0.819 & (\text{kl. 12:00}), \\ \cos \theta_z &= \cos \phi \cos \omega = 0 & (\text{kl. 18:00}).\end{aligned}$$

Middelverdien til $\cos \theta_z$ blir:

$$\overline{\cos \theta_z} = \frac{\cos \phi}{t} \int_0^t \cos(\Omega t) dt = \frac{\cos \phi}{\Omega t} [\sin(\Omega t)]_0^t = \frac{\cos \phi \sin(\Omega t)}{\Omega t} = \frac{2 \cos \phi}{\pi} = 0.521.$$

[Det var en trykkfeil i første versjon av oppgaven, i det det ble spurt om middelverdien av θ_z i stedet. Dette integralet kan ikke beregnes analytisk. I alle fall er det $\overline{\cos \theta_z}$ som behøves i neste punkt.]

- b) Vi lar $a = 0.30$ være jordens albedo, og $\beta = 0.25$ andelen av solinnstrålingen som blir absorbert av atmosfæren. Når senitvinkelen er θ_z , blir den momentane effekten absorbert på den horisontale overflaten (husk at absorpsjonen $\epsilon_S = \epsilon_S = 0.9$):

$$P = (1 - a)(1 - \beta)\epsilon_S S_0 A \cos \theta_z.$$

Dette gir middelverdien:

$$\overline{P} = (1 - a)(1 - \beta)\epsilon_S S_0 A \overline{\cos \theta_z} = 336 \text{ W}.$$

- c) Hvis varmetapet bare skjer ved varmeovergang på den øvre overflaten, har vi likevekt når:

$$\overline{P} = hA(T - T_o) \quad \implies \quad T = T_o + \frac{\overline{P}}{hA} = 77^\circ \text{C}.$$

- d) Hvis varmetapet bare skjer ved stråling, og omgivelsenes effektive strålingstemperatur er $T_s = T_o - 6 \text{ K} = 284 \text{ K}$, har vi varmebalanse hvis:

$$\overline{P} = \epsilon \sigma (T^4 - T_s^4) A \quad \implies \quad T = \left(T_s^4 + \frac{\overline{P}}{\epsilon \sigma A} \right)^{1/4} = 403 \text{ K} = 130^\circ \text{C}.$$

Vi ser at denne temperaturen er godt over kokepunktet, så det beste vi kunne håpe på er at vannet varmes opp til det koker (og at sekken ikke sprekker).

- e) Siden vanntemperaturen i c) er vesentlig lavere enn i d), er varmetapet på overflaten vesentlig større enn strålingstapet. [I prinsippet kunne vi selvsagt tatt hensyn til begge tapene på en gang, men dette fører til en fjerdegrads ligning for T . Denne løses enklest numerisk.]
- f) Den effekten som varmer opp vannet er differensen mellom innstrålt effekt og varmeovergang fra overflaten. Antar vi T_o konstant har vi $dT/dt = d\Delta T/dt$. Altså ($m = \rho V$ er vannets masse):

$$\begin{aligned}cm \frac{dT}{dt} &= c\rho V \frac{d\Delta T}{dt} = (1 - a)(1 - \beta)\epsilon_S S_0 A \cos \theta_z - hA\Delta T(t), \\ \frac{d\Delta T}{dt} + \frac{hA}{c\rho V} \Delta T &= \frac{(1 - a)(1 - \beta)\epsilon_S S_0 A \cos(\phi)}{c\rho V} \cos(\Omega t).\end{aligned}$$

Dette er den oppgitte differensialligningen, med:

$$\lambda = \frac{hA}{c\rho V} = 1.34 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1},$$

$$C = \frac{(1-a)(1-\beta)\epsilon_S S_0 A \cos(\phi)}{c\rho V} = 1.26 \cdot 10^{-3} \text{ K/s} \quad (= 4.54 \text{ K/h}).$$

[$\tau = 1/\lambda = 74\,600 \text{ s} = 20.7 \text{ h}$ er tidskonstanten for naturlig kjøling av sekken. Vi ser at den holder godt på varmen. Konstanten C er forholdet mellom den *maksimale* solinnstrålingen på stedet og vannets totale varmekapasitet.] Ligningen ovenfor er en inhomogen lineær første ordens differensialligning med konstante koeffisienter, som kan løses med standard metoder, eller den oppgitte løsningen kan sjekkes ved innsetting. Randbetingelsen er $\Delta T(0) = 0$, som innsatt i løsningen gir ($\Omega = 15^\circ/\text{h} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$):

$$0 = \frac{C\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} + K, \quad \implies \quad K = -\frac{C\lambda}{\lambda^2 + \Omega^2} = -3.09 \text{ K}.$$

Vi kan da skrive løsningen for kl 18:00 som (husk at da er $t = 6 \text{ h} = 21\,600 \text{ s}$ og $\Omega t = 90^\circ = \pi/2$):

$$T(t) = T_0 + |K| \left(\cos(\Omega t) - e^{-\lambda t} + \frac{\Omega}{\lambda} \sin(\Omega t) \right) = T_0 + |K| \left(\frac{\Omega}{\lambda} - e^{-\lambda t} \right) = 29.6^\circ.$$

Vi ser at estimatet i c) er alt for optimistisk, tiden $t = 6$ timer strekker rett og slett ikke til for å varme opp vannet til vi får likebevekt. [Vi hadde imidlertid fått litt høyere temperatur hvis vi ikke hadde ventet helt til kl. 18:00.]

OPPGAVE 15:

a) Med $f = 6D = 1.2 \text{ m}$ har vi:

$$\phi_m = 2 \arctan \left(\frac{D}{4f} \right) = 0.0823 = 4.37^\circ.$$

Siden $\cos \phi_m = 0.999 \approx 1.000$ danner teleskopet skarpe bilder (Punktet der strålen treffer brennplanet er praktisk talt uavhengig av ϕ , jfr. neste punkt.)

b) Av lign. (2.11) i læreboken, med $\alpha = 32' \ll 1$ (radian) som solens vinkeldiameter, har vi:

$$W' = \frac{4f \tan(\alpha/2)}{(1 + \cos \phi_m) \cos \phi_m} \approx 2f \tan(\alpha/2) \approx \alpha f = 1.11 \text{ cm}.$$

c) Av definisjonen av konsentrasjonsfaktor har vi:

$$k = \frac{\pi D^2}{\pi W'^2} \approx \left(\frac{D}{\alpha f} \right)^2 = 325.$$

d) Hvis vi antar at speilet er en perfekt reflektor, får vi at energien som treffer innenfor speildiameteren D er ($\alpha = 0.40$ er den oppgitte effektive albedo):

$$P = (1 - \alpha) \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 S_0 = 26 \text{ W}.$$

[En mer realistisk reflektivitet på et godt teleskopspeil er 0.88 ... 0.96.]

e) I termisk likevekt stråler skiven like stor effekt ut som den mottar. Med $A_t = \pi(W'/2)^2$ som arealet av skiven, har vi ($\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$ er Stefan-Boltzmanns konstant):

$$P = \sigma A_t T^4 \quad \implies \quad T = \left(\frac{4P}{\sigma \pi W'^2} \right)^{\frac{1}{4}} = 1\,482 \text{ K} = 1\,209^\circ \text{ C}.$$

Hvis vi regner at skiven er tynn og stråler fra begge sider, blir $A_t = 2\pi W'^2/4$ og vi finner $T = 1\,246 \text{ K}$.

Vi kan her legge merke til at dersom vi ikke antar at skiven er sort, men har samme emissivitet, ϵ for synlig og infrarødt lys, blir svaret uendret, fordi absorpsjonen er lik emissiviteten (Kirchhoffs lov). Vi får altså:

$$\epsilon P = \epsilon \sigma A_t T^4,$$

så T blir uendret. Men det tar selvsagt lenger tid før likevektstemperaturen oppnås jo mindre emissiviteten er.

OPPGAVE 16:

a) Verdien for k er ekstremal (maksimal eller minimal) dersom:

$$\frac{dk}{d\phi_m} = \frac{2 \cos \phi_m \sin \phi_m}{\tan^2(\alpha/2)} (-\sin^2 \phi_m + \cos^2 \phi_m) = 0,$$

dvs. for $\cos \phi_m = \sin \phi_m$ eller $\phi_m = \pi/4 = 45^\circ$, dersom $\phi_m > 0$. Dette er åpenbart et maksimum, minimumsverdien $k = 0$ har vi for $\phi_m = 0$ og $\phi_m = \pi/2$. For denne verdien av ϕ_m er (se oppgave 10):

$$f : D = \frac{f}{D} = \frac{1}{4 \tan(\phi_m/2)} = 0.604.$$

b) Siden $\alpha = 32' \ll 1$ (radian), har vi:

$$k_m = k(\phi_m) = \left(\frac{\cos \phi_m \sin \phi_m}{\tan(\alpha/2)} \right)^2 = \frac{1}{4 \tan^2(\alpha/2)} \approx \frac{1}{\alpha^2} = 11\,540.$$

c) Vi hadde (se forelesningsnotat for 17.09 2010):

$$k = \left(\frac{D}{W'_m} \right)^2$$

med

$$D = 4f \tan(\phi_m/2),$$
$$W' = \frac{4f \tan(\alpha/2)}{(1 + \cos \phi) \cos \phi}.$$

Vi ser at både D og W' vokser med økende ϕ_m , men for $\phi_m > \pi/4$ vokser W' fortere enn D , slik at forholdet mellom dem minker.